

УДК 629.015/631.17.002.5



С. М. Дюндик



Р. В. Антощенко



В. М. Антощенко

## ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ БАГАТОЕЛЕМЕНТНИХ МОБІЛЬНИХ МАШИН

У статті обґрунтовано метод складання рівнянь динаміки багатоелементних мобільних машин. Розроблено математичну модель триелементної мобільної машини та наведено результати реалізації моделі для випадку просторового руху. Отримано залежності швидкості обертання, динамічного радіуса коліс тягової машини, координат та швидкості центрів мас багатоелементної мобільної машини від часу.

Ключові слова: математична модель, динаміка, мобільна машина.

**Постановка проблеми.** Багатоелементні мобільні машини (БММ) є нелінійними динамічними системами. Рух таких машин по опорній поверхні супроводжується коливаннями їх елементів, які впливають на динамічні та енергетичні показники функціонування БММ.

Незважаючи на існуючі публікації з питань дослідження динаміки БММ [1, 2, 3], процес складання рівнянь руху таких систем залишається трудомістким. Завдання ще більше ускладнюється для систем з просторово-рухомими ланками. Комп'ютерні системи аналітичних обчислень (системи комп'ютерної алгебри) полегшують таке завдання. Однак істотно спростити вирішення такої проблеми можна тільки за комп'ютерної реалізації методів складання, аналізу та розв'язання рівнянь на аналітичному рівні. Саме такий підхід розроблений у працях [4, 5, 6]. Зазначена методика потребує аналітичного опису геометричних і кінематичних (неголономних) зв'язків, інерційних параметрів тіл (мас і моментів інерції), характеристик проекцій активних (заданих) сил і моментів, пружних і дисипативних сил і моментів [7, 8].

Різноманіття конструкцій та технологічних схем БММ із різними способами з'єднання потребують збільшення кількості математичних моделей для дослідження динаміки та ефективності їх використання [9, 10].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для дослідження динаміки багатоелементних машин застосовують принцип Д'Аламбера – Лагранжа [11] або рівняння Лагранжа 2-го роду [12]. У працях [13, 14, 15] наведені дослідження динаміки й стійкості мобільних машин, математичні моделі руху яких є цілісними. Однак при зміні структури або внутрішніх зв'язків необхідно перебудовувати їх заново. Це призводить до ускладнення досліджень, побудови рівнянь динаміки [16], що показано на прикладі досліджень [17] для випадку плоскопаралельного руху БММ.

**Метою статті** є розроблення та реалізація методу формувань рівнянь динаміки БММ з різними способами їх з'єднання.

**Виклад основного матеріалу.** Алгоритм формування рівнянь неголономних систем викладено у працях [4–8, 10]. Він заснований на методі складання рівнянь з виключеними залежними варіаціями узагальнених координат [3] і принципі Д'Аламбера – Лагранжа. Вихідними даними для нього є рівняння кінематичних (неголономних) зв'язків виду  $\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}_2 + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, t)$ , що виражають залежні узагальнені швидкості  $\dot{\mathbf{q}}_1$  через незалежні узагальнені швидкості  $\dot{\mathbf{q}}_2$  (псевдошвидкості  $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \dot{\mathbf{q}}_2$ ). Крім цього задається: стан зв'язаних з твердими тілами систем координат щодо абсолютної через узагальнені координати; інерційні характеристики тіл – маси і тензори інерції; діючі сили і моменти, в тому числі пружні і дисипативні сили. Така інформація, представлена в аналітичному вигляді, дозволяє спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДіМ [6, 7, 10] автоматично скласти рівняння руху у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{W}}_{C_i}^{uT} m_i \tilde{\mathbf{a}}_{C_i} + \tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^{uT} \left( \left[ \tilde{\mathbf{J}}_i^{(i)} \right] \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \times \left[ \tilde{\mathbf{J}}_i^{(i)} \right] \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \right) \right\} - \tilde{\mathbf{W}}_P^T \mathbf{P} = 0, \quad (1)$$

де  $\tilde{W}_{C_i}^{uT}$ ,  $\tilde{W}_{\omega_i}^{uT}$ ,  $\tilde{W}_P^T$  – транспоновані структурні матриці відповідно радіус-векторів центрів мас тіл, кутів поворотів (кутових швидкостей) тіл, радіус-векторів активних сил системи, які визначаються диференціюванням зазначених геометричних і кінематичних параметрів за узагальненими координатами з незалежними варіантами (за псевдошвидкостями).

БММ задається динамічними моделями (рис. 1), представленими твердими тілами, положення яких визначається декартовими координатами центра мас (точка O), трьома кутами Ейлера – Крилова ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Колеса передньої осі тягової машини повертаються навколо вертикальної осі, що проходить через їх середину. Це забезпечує поворот тягової машини. Кожне колесо обертається навколо своєї осі. Колеса є пневматиками, з боку яких на корпус діють пружні і дисипативні сили, спричинені силами тяжіння. До коліс прикладені рушійні сили, сили тертя і моменти, а також сили опору руху.

Динамічна модель БММ (рис. 1) має вісім узагальнених координат, вектор яких має такий вигляд:

$$\dot{\mathbf{q}} = [X^T, Y^T, Z^T, \beta^T, \alpha^B, \beta^B, \alpha^C, \beta^C]^T, \quad (2)$$

де  $X^T$ ,  $Y^T$ ,  $Z^T$  – повздовжня, поперечна та вертикальна координати центра мас тягової машини;  $\beta^T$  – кут повороту першої причіпної машини навколо поперечної осі (вісь  $y$ );  $\alpha^B$ ,  $\beta^B$  – кути повороту першої причіпної машини навколо осей  $x$  та  $y$ ;  $\alpha^C$ ,  $\beta^C$  – кути повороту другої причіпної машини навколо осей  $x$  та  $y$ .

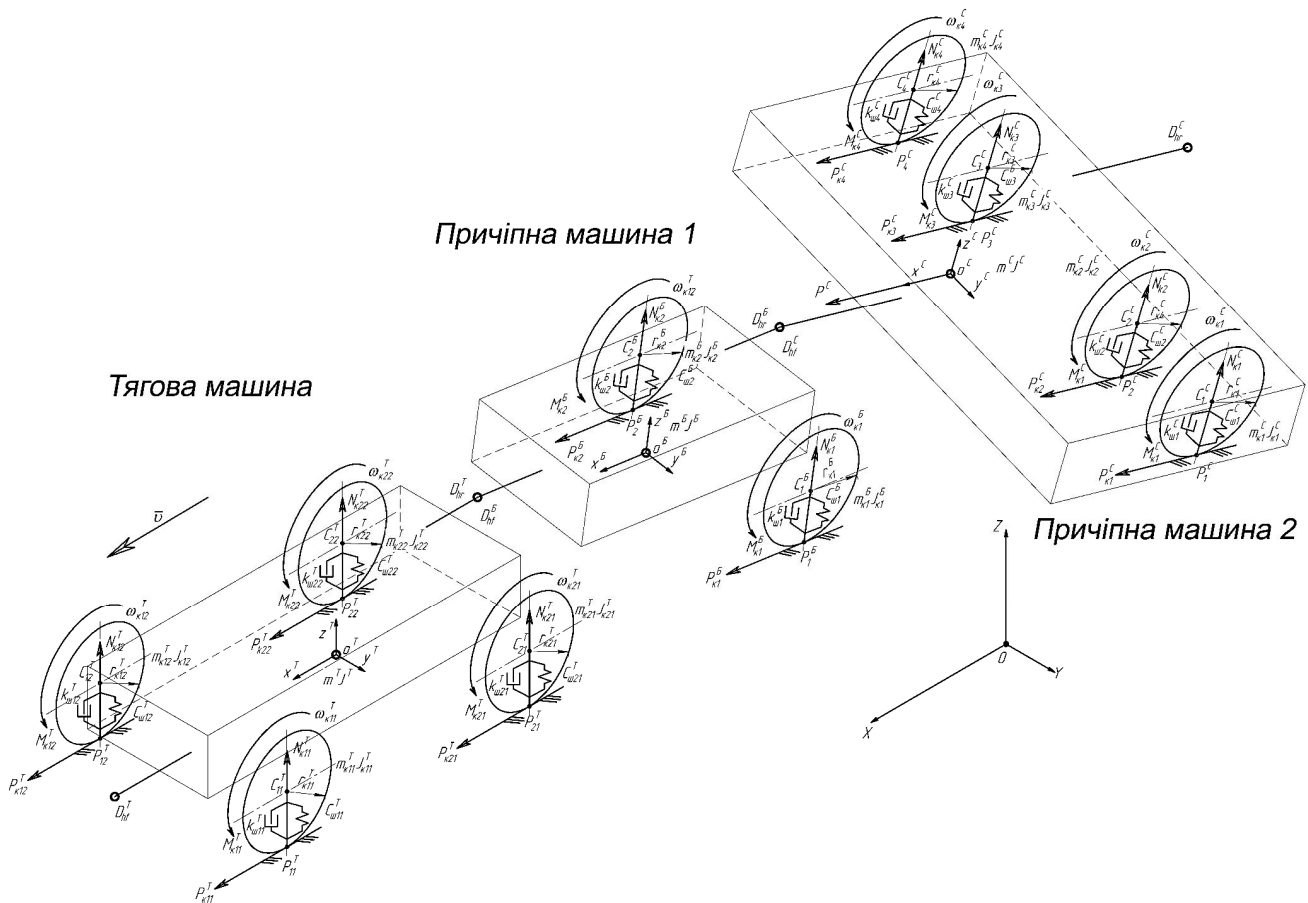


Рис. 1. Динамічна модель багатоелементної мобільної машини

Як незалежні координати із залежними варіаціями вибрано вектор

$$\dot{\mathbf{v}} = [\alpha^T, \gamma^T, \varphi_{11}^T, \varphi_{12}^T, \varphi_{21}^T, \varphi_{22}^T, \gamma^B, \varphi_{11}^B, \varphi_{12}^B, \gamma^C, \varphi_1^C, \varphi_2^C, \varphi_3^C, \varphi_4^C]^T, \quad (3)$$

де  $\alpha^T$ ,  $\gamma^T$  – кути повороту тягової машини навколо повздовжньої (вісь  $x$ ) та вертикальної осей (вісь  $z$ );  $\varphi_{11}^T$ ,  $\varphi_{12}^T$ ,  $\varphi_{21}^T$ ,  $\varphi_{22}^T$  – кути повороту коліс тягової машини (переднього лівого, переднього правого, заднього лівого, заднього правого) навколо осі обертання;  $\gamma^B$  – кут повороту першої причіпної машини навколо вертикальної осі (вісь  $z$ );  $\varphi_{11}^B$ ,  $\varphi_{12}^B$  – кути повороту коліс першої причіпної машини (лівого та правого)

навколо осі обертання;  $\gamma^C$  – кут повороту другої причіпної машини навколо вертикальної осі (вісь  $z$ );  $\varphi_1^C, \varphi_2^C, \varphi_3^C, \varphi_4^C$  – кути повороту коліс другої причіпної машини навколо осей обертання.

При складанні математичної моделі БММ зроблені припущення: остови елементів машини розглянуто як абсолютно тверді тіла; машина симетрична щодо повздовжньої площини; колеса мають лінійну пружність; сили опору коченню є сталими.

Динамічна модель БММ у формі Коші має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{X}^T = f_1(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{Y}^T = f_2(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{Z}^T = f_3(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{\beta}^T = f_4(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{\alpha}^B = f_5(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{\beta}^B = f_6(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{\alpha}^C = f_7(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \\ \dot{\beta}^C = f_8(\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}); \end{cases} \begin{cases} \dot{\alpha}^T = \frac{a^T \dot{X}^T + b^T \dot{Y}^T + c^T \dot{Z}^T - \beta^T (d^T \cos \gamma^T + \sin \gamma^T)}{\cos \gamma^T - d^T \sin \gamma^T}; \\ \dot{\gamma}^T = \alpha^T \beta^T + \nu B_x^T \frac{\text{tg} \gamma^T}{l^T}; \quad \dot{\varphi}_{11}^T = \frac{\nu C_{11,xy}^T}{Z_{C_{11}}^T}; \quad \dot{\varphi}_{12}^T = \frac{\nu C_{12,xy}^T}{Z_{C_{21}}^T}; \\ \dot{\varphi}_{21}^T = \frac{\nu C_{21,xy}^T}{Z_{C_{21}}^T}; \quad \dot{\varphi}_{22}^T = \frac{\nu C_{22,xy}^T}{Z_{C_{22}}^T}; \quad \dot{\gamma}^B = \frac{\nu y A^B}{l_1^B - h f_x^B} + \alpha^B \beta^B; \\ \dot{\varphi}_1^B = \frac{\nu C_{1x}^B}{Z_{C_1}^B}; \quad \dot{\varphi}_2^B = \frac{\nu C_{2x}^B}{Z_{C_1}^B}; \quad \dot{\gamma}^C = \frac{\nu y A^C}{l_1^C - h f_x^C} + \alpha^C \beta^C; \\ \dot{\varphi}_1^C = \frac{\nu C_{1x}^C}{Z_{C_1}^C}; \quad \dot{\varphi}_2^C = \frac{\nu C_{2x}^C}{Z_{C_2}^C}; \quad \dot{\varphi}_3^C = \frac{\nu C_{3x}^C}{Z_{C_3}^C}; \quad \dot{\varphi}_4^C = \frac{\nu C_{4x}^C}{Z_{C_4}^C}. \end{cases} \quad (4)$$

де  $f_i$  – функції від векторів-матриць  $\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbf{M}, \mathbf{F}$ , отриманих з  $\tilde{\mathbf{W}}_{C_i}^{uT}, \tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^{uT}, \tilde{\mathbf{W}}_P^T$ ;  $i=1, \dots, 8$  – номер узагальноної координати.

Теоретичні дослідження динамічної моделі при прямолінійному русі БММ з постійною швидкістю (рис. 2) дозволили визначити координати центрів мас її елементів (рис. 3).

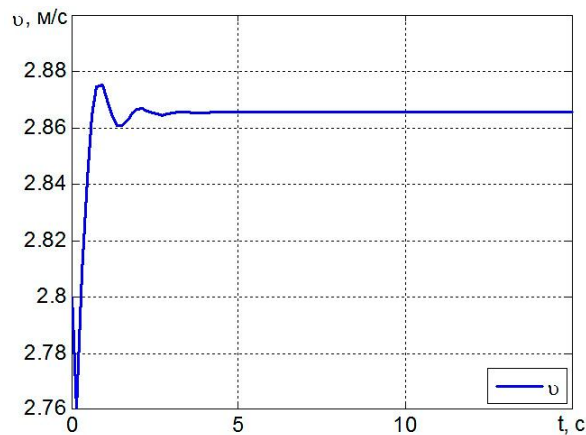


Рис. 2. Залежність швидкості руху БММ від часу

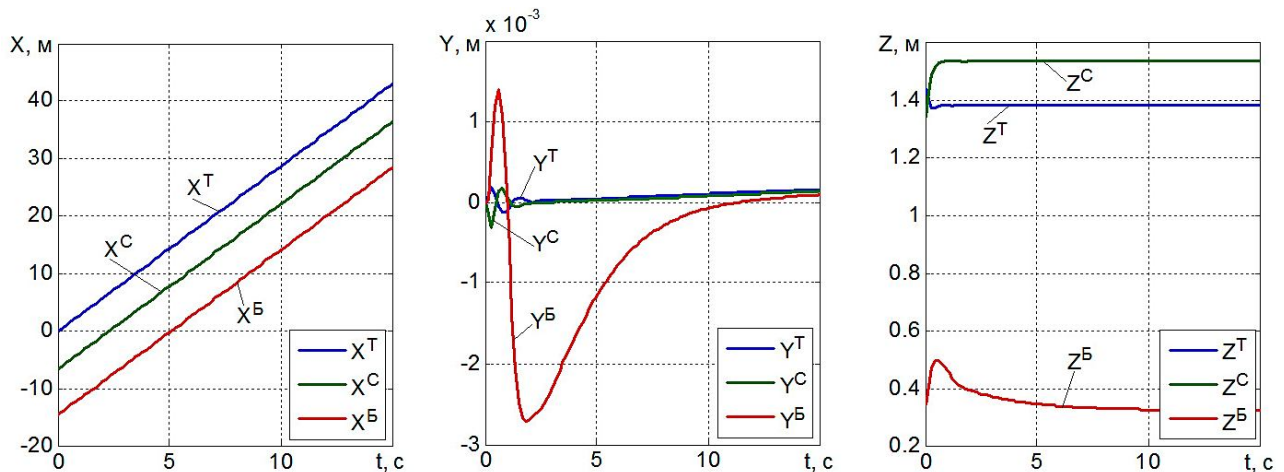


Рис. 3. Координати центрів мас ( $X, Y, Z$ ) елементів БММ ( $T$  – тягової машини;  $B$  – першої причіпної машини;  $C$  – другої причіпної машини) при прямолінійному русі

На початку руху відбуваються перехідні процеси (рис. 2, 3) при  $0 < t < 15$  с, які пов'язані з вертикальною деформацією шин елементів БММ.

Кут повороту керованих коліс задається в аналітичному вигляді виразом  $\psi = 0,1 \cdot \sin(0,5t)$ .

Враховуючи, що  $\dot{\varphi}_i = \omega_i$ , де  $i = 1, \dots, 4$ , визначимо швидкості обертання коліс тягової машини (рис. 4).

Перехідний процес, пов'язаний із вертикальною деформацією шин, також вплинув на швидкість обертання коліс тягової машини (рис. 4), але його тривалість не перевищила однієї секунди. Межі коливань швидкостей обертання коліс (для всіх коліс) складають  $0,275 \text{ хв}^{-1}$  за період  $T = 12$  с. Передні колеса  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{12}$  мають меншу швидкість обертання, ніж задні  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{22}$ , на  $0,15 \text{ хв}^{-1}$ .

Розрахуємо швидкості руху центрів мас елементів БММ (рис. 5). Межі коливань швидкостей центрів мас елементів БММ по осі  $x$  ( $v_x$ ) відповідно складають

$0,25 \text{ м/с}$ ,  $0,18 \text{ м/с}$  та  $0,17 \text{ м/с}$ ; по осі  $y$  ( $v_y$ ) межі коливань складають  $1,156 \text{ м/с}$ ,  $0,87 \text{ м/с}$  та  $0,8 \text{ м/с}$ ; а по осі  $z$  ( $v_z$ ) спостерігається лише перехідний процес на початку руху. Вертикальна деформація шин також вплинула на коливання швидкості  $v_z^B$  другої причіпної машини у вертикальному напрямку (рис. 5, в).

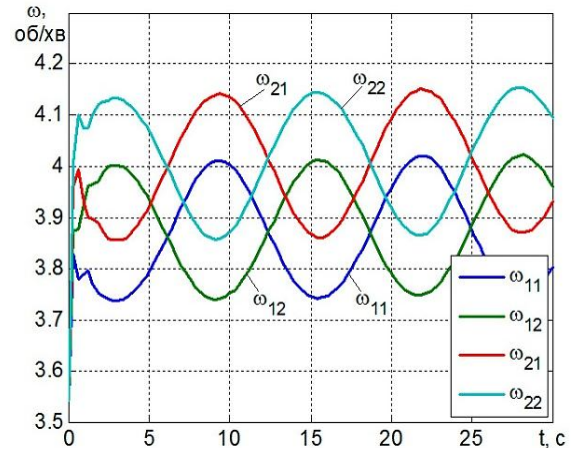


Рис. 4. Швидкості обертання коліс тягової машини:  $\omega_{11}$  – переднього лівого;  $\omega_{12}$  – переднього правого;  $\omega_{21}$  – заднього лівого;  $\omega_{22}$  – заднього правого

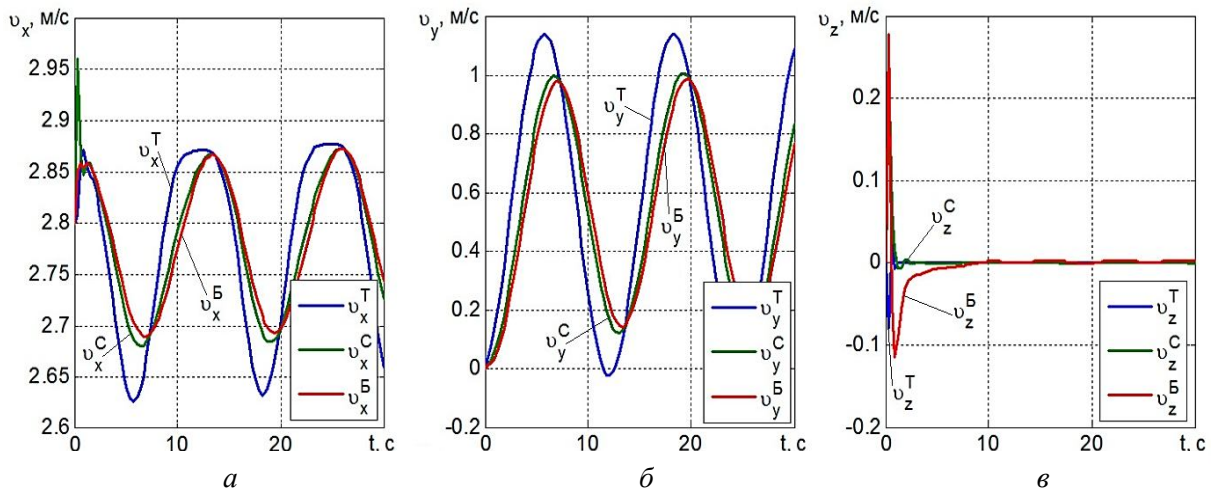


Рис. 5. Швидкості руху центрів мас елементів БММ: а –  $v_x^n$ ; б –  $v_y^n$ ; в –  $v_z^n$

Динамічні радіуси коліс тягової машини (рис. 6) не залежать від швидкості їх обертання, але мають перехідний процес, що триває до  $2,8$  с. При  $t > 2,8$  с значення залишаються на рівні  $0,742$  м для передніх коліс та  $0,7$  м для задніх.

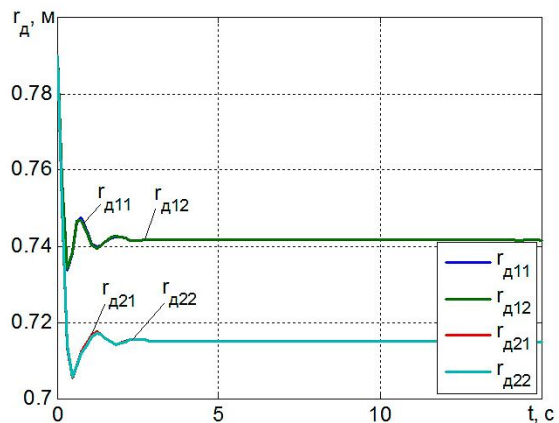


Рис. 6. Залежності динамічних радіусів коліс тягової машини від часу

## Висновки

1. Запропонований метод складання рівнянь з виключеними залежними варіаціями узагальнених координат за принципом Д'Аламбера – Лагранжа дозволяє автоматизувати складання й розв'язування рівнянь динаміки в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДіМ. Математична модель просторового руху елементів БММ, з'єднаних за допомогою сферичних шарнірів, подається як неголономна система твердих тіл з просторовим рухом на пружних пневматиках.

2. Теоретичні дослідження динамічної моделі БММ з використанням запропонованого методу дозволили визначити динамічні показники функціонування елементів БММ при просторовому русі.

3. Теоретичними дослідженнями встановлено, що перехідний процес, пов'язаний із вертикальною деформацією шин, вплинув на швидкість обертання коліс тягової машини. Тривалість процесу не перевищила однієї секунди.

## Список використаних джерел

1. Аппель, П. Теоретическая механика [Текст] : в 2-х т. / П. Аппель. – Москва : Физматгиз, 1960. Т. 2 : Динамика системы. Аналитическая механика. – 1960. – 487 с.
2. Лурье, А. И. Аналитическая механика [Текст] / А. И. Лурье. – Москва : Наука, 1961. – 824 с.
3. Неймарк, Ю. И. Динамика неголономных систем [Текст] / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – Москва : Наука, 1967. – 520 с.
4. Андреев, Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем [Текст] / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Харьков : ХПИ, 1993. – Вып. 54. – С. 93–98.
5. Андреев, Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел [Текст] / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 130–138.
6. Андреев, Ю. М. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Д'Аламбера – Лагранжа [Текст] / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 106–115.
7. Андреев, Ю. М. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел [Текст] / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Надежность и долговечность машин и сооружений. – Киев : ИПП им. Г. С. Писаренко : Асоц. “Надежность машин и сооружений”, 2006. – Вып. 26. – С. 11–18.
8. Andreev, Yu. Multibody dynamics in analytic systems of computational mechanics and engineering applications [Text] / Yu. Andreev. – In : The second International Conference “Nonlinear Dynamics - 2007”. – Kharkov : NTU “KhPI”, 2007. – PP. 6–11.
9. Антонюк, Е. Я. К теории движения сочлененного многозвенного автопоезда [Текст] / Е. Я. Антонюк, В. М. Матиясевич // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 138–144.
10. Антощенко, Р. В. Динаміка та енергетика руху багатоелементних машинно-тракторних агрегатів [Текст] : монографія / Р. В. Антощенко. – Харків : ХНТУСГ: Міськдрук, 2017. – 244 с.
11. Study plane-parallel motion movement combined seeding unit [Text] / V. Adamchuk, I. Petrychenko, M. Korenko, H. Beloev, B. Borisov // III International scientific and technical congress agricultural machinery. Proceedings. Varna. 2015. – Vol. 1. – P. 7–11.
12. Tractors and Their Power Units [Text] / J. B. Liljedahl, P. K. Turnquist, D. W. Smith, M. Hoki // ASAE, St. Joseph, MI. – 1996. – PP. 345–361.
13. Рославцев, А. В. Результаты исследования движения МТА [Текст] / А. В. Рославцев, С. Л. Абдула // Тракторы и сельхозмашины. – 1999. – № 10. – С. 14–18.
14. Лихвенко, С. П. Математическая модель для расчетов распределения ведущих моментов и поэтапного буксования полноприводных тракторов [Текст] / С. П. Лихвенко // Повышение надежности восстанавливаемых деталей машин : вестник ХГТУСХ. – Харьков : ХГТУСХ, 2001. – Вып 8, Т. 2. – С. 83–86.
15. Волошин, Ю. Математические модели колебаний колёсных транспортных и тягово-транспортных средств [Текст] / Ю. Волошин // Тракторы и сельхозмашины. – 2007. – № 6. – С. 37–41.
16. Антощенко, Р. В. К построению уравнений динамики многоэлементного машинно-тракторного агрегата [Текст] / Р. В. Антощенко, Л. Н. Тищенко, Ю. М. Андреев // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця : Вінницький нац. аграр. ун-т, 2015. – № 3(79). – С. 69–79.
17. Антощенко, Р. В. До побудови математичної моделі руху багатоелементних мобільних машин та обґрунтуванню зв'язків між ними [Текст] / Р. В. Антощенко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь : ТДАУ, 2014. – Вип. 14, Т. 9. – С. 282–287.

*Стаття надійшла до редакції 24.02.2018 р.*

УДК 629.015/631.17.002.5

С. М. Дюндик, Р. В. Антощенко, В. Н. Антощенко

### К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

*В статье обоснован метод составления уравнений динамики многоэлементных мобильных машин. Разработана математическая модель трехэлементной мобильной машины и приведены результаты реализации модели для случая пространственного движения. Получены зависимости скорости вращения, динамического радиуса колес тяговой машины, координат и скорости центров масс многоэлементной мобильной машины от времени.*

*Ключевые слова: математическая модель, динамика, мобильная машина.*

UDC 629.015/631.17.002.5

S. M. Diundik, R. V. Antoshchenkov, V. M. Antoshchenkov

### TO RESEARCH OF DYNAMICS OF MULTIELEMENT MOBILE MACHINES

*Multi-cellular mobile machines are non-linear dynamic systems. The motion of such machines on the support surface is accompanied by fluctuations of their elements, which affect the dynamic and energy performance of Multi-cellular mobile machines.*

*Despite the existing publications on the study of the dynamics of multi-cellular mobile machines, the process of compiling the equations of motion of such systems remains labor-intensive. The task is even more complicated for systems with spatially-moving links. Computer systems of analytical calculations (computer algebra systems) facilitate such a task. However, it is possible to substantially simplify the solution of such a problem only with the computer implementation of the methods of compiling, analyzing and solving equations at the analytical level. This is the very approach developed in the works. This methodology requires analytical description of geometric and kinematic (nonholonomic) bonds, inertial parameters of bodies (masses and moments of inertia), characteristics of projections of active (given) forces and moments, elastic and dissipative forces and moments.*

*The variety of designs and technological schemes of BMM with different connection methods require an increase in the number of mathematical models to study the dynamics and efficiency of their use.*

*The purpose of the article is to develop and implement a method for forming equations of dynamics of a multi-cellular mobile machine with different methods of their connection.*

*The method of forming of equalizations of dynamics of multielement mobile machines is in-process reasonable. The mathematical model of three-element mobile machine is worked out and results over of realization of model are brought for the case of spatial motion. Dependences of speed of rotation and dynamic radius of wheels of hauling machine are got, coordinates and speed of center of mass of multielement mobile machine from time.*

*Keywords: mathematical model, dynamics, mobile machine.*

**Дюндик Сергій Михайлович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобільної техніки Національної академії Національної гвардії України.

**Антощенко Роман Вікторович** – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри мехатроніки та деталей машин Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П. Василенка.

**Антощенко Віктор Миколайович** – кандидат технічних наук, професор кафедри тракторів та автомобілів Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П. Василенка.