

УДК 621.493



В. П. Раківненко



В. А. Сало



О. М. Кириченко



Л. А. Гребеник

## МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНОЇ МІЦНОСТІ ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЇ РІДИНОЮ ЄМНОСТІ ПРИ НАГРІВАННІ

*Розглядається загальна проблема руйнування частково заповненої рідиною оболонкової ємності при її нагріванні внаслідок втрати локальної (місцевої) стійкості під дією перепаду температури на межі рівня заповнення.*

*К л ю ч о в і с л о в а:* оболонкова ємність, “холодна” діафрагма, розрахункова схема, крайовий ефект, перетворення Фур’є, довга оболонка.

**Постановка проблеми.** Оболонкові конструкції широко застосовуються як ємності для зберігання та транспортування різноманітних рідин у промисловості, побуті і військовій справі. Це стаціонарні або рухомі цистерни, паливні баки надводних і підводних кораблів, автобронетехніки, рідкопаливних ракет і космічних апаратів. У більшості випадків рідина з ємності витрачається, наприклад, при роботі двигунів внутрішнього згорання. Внаслідок цього досить часто ємність виявляється заповненою частково і, якщо вона знаходиться в температурному полі, то на межі рівня заповнення виникає перепад температури і відповідно – додаткові стискаючі зусилля (напруження), які можуть бути причиною локальної втрати стійкості або руйнування оболонки. Віткання, наприклад, рідини 3-го класу небезпечності (нафтопродуктів, нітратів або луку) може призвести до небезпечних наслідків. Для запобігання цьому необхідно мати розуміння явища, а також рекомендації щодо безпечного обслуговування і експлуатації таких ємностей.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження стійкості частково заповнених рідиною ємностей при нагріванні, що обмежені “холодними” діафрагмами, віднесені до класу локальної (місцевої) стійкості пружних систем. Напружений стан таких конструкцій визначається крайовим ефектом. У будівельній механіці крайові задачі є найбільш складними, через що існує невелика кількість публікацій за даною тематикою. Так, у праці [1] наведений, в основному, огляд попередніх досліджень, а в дослідженні [2] зусилля, які призводять до втрати стійкості, представлені тригонометричним рядом з великим числом членів, що значно ускладнює рішення задачі без гарантованої точності.

У даній статті для визначення критичного перепаду температур, напружень і деформацій в зоні крайового ефекту пропонується інша методика, яка базується на інтегральних перетвореннях Фур’є, що дає можливість спростити рішення та більш точно визначити вище вказані критичні параметри.

**Метою статті** є побудова математичної моделі напружено-деформованого стану оболонкової ємності, яка частково заповнена рідиною і знаходиться під дією температурного поля, та отримання математичної залежності для критичної температури, за якої оболонка втрачає локальну стійкість в зоні крайового ефекту.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо рівномірно нагріту циліндричну оболонку, частково заповнену рідиною (див. рис. 1, б), порожня частина якої нагрівається швидше ділянки, що контактує з рідиною. У випадку перепаду температури  $T = t_2 - t_1$  “холодна” діафрагма (дзеркало рідини) перешкоджає температурним переміщенням оболонки в радіальному напрямку, і в ній виникають кільцеві стискаючі напруження  $\sigma_y^0$ . Коли вони досягають критичної величини, біля діафрагми виникають здуття і вм’ятини (оболонка втрачає стійкість), тому необхідно визначити величину температури  $T$ , при якій відбувається зазначене явище.

© В. П. Раківненко, В. А. Сало, О. М. Кириченко, Л. А. Гребеник, 2018

Дослідження проводиться для ізотропної оболонки в межах пружності матеріалу. При цьому вважаємо, що температура по товщині стінки постійна, а по довжині змінюється стрибком (рис. 1, а).

Оскільки температурні зусилля (напруження) швидко згасають з віддаленням від міста стрибка температури (рис. 1, в), то розглянуту оболонку можна вважати нескінченно довгою. Здуття системи також можна чекати в області дії крайового ефекту, що дає право у дослідженні використовувати диференціальні рівняння локальної стійкості оболонки [3]:

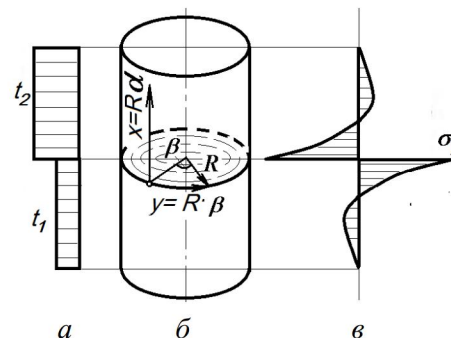


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

$$\frac{D}{\delta} \nabla^4 \omega = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sigma_x^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2\tau^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad \nabla^4 \varphi = -\frac{E}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де  $\omega, \varphi$  – радіальні переміщення і функції напружень;

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y};$$

$\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau^0$  – нормальні і дотичні напруження в оболонці до втрати нею стійкості;

$D = E\delta^3 / [12(1 - \mu^2)]$  – жорсткість оболонки при згині;

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона;  $E$  – модуль Юнга.

Вважаючи, що на великій відстані від діафрагми ( $x = \infty$ ) усі функції дорівнюють нулю, а “холодна” діафрагма забезпечує шарнірне закріплення оболонки, до системи (1) треба додати такі граничні умови (при  $x = 0$ ):

$$\omega = m_x = \sigma_x = \tau = 0,$$

де  $m_x$  – згинальний момент у поперечних перерізах.

Із розрахунку критичного напруженого стану маємо

$$\sigma_x^0 = \tau^0 = 0; \quad \sigma_y^0 = E \cdot \alpha_1 \cdot T \cdot e^{-\lambda \alpha} \cdot \cos(\lambda \cdot \alpha), \quad (2)$$

де  $\alpha_1$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки;  $\alpha = x/R$  – безрозмірна координата вздовж твірної оболонки;  $\lambda^4 = 3(1 - \mu^2)R^2 / \delta^2$ .

Стискаючі напруження  $\sigma_y^0$  вважаємо додатними. Також вважатимемо, що після втрати стійкості функції  $\omega$  та  $\varphi$  будуть мати такий вигляд:

$$\omega = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \cdot \cos(n \cdot \beta); \quad \varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n \cdot \cos(n \cdot \beta), \quad (3)$$

де  $\omega_n$  і  $\varphi_n$  – невідомі функції координати  $x$  або  $\alpha$ ;  $\beta$  – кутова координата.

Згідно з виразами (2) та (3) система (1) для безрозмірної координати  $\alpha$  має вигляд

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^2 \cdot \omega_n = \frac{4\lambda^4}{ER} \frac{d^2 \varphi_n}{d\alpha^2} + 4\lambda^4 \cdot n^2 \cdot \alpha_1 \cdot T \cdot \omega_n \cdot e^{-\lambda \alpha} \cdot \cos(\lambda \alpha); \quad (4)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^2 \cdot \varphi_n = -ER \frac{d^2 \omega_n}{d\alpha^2}.$$

Подальше дослідження полягає у знаходженні власних функцій однорідної системи (4) з граничними умовами (при  $\alpha = 0$ )

$$\omega_n = \frac{d^2 \omega_n}{d\alpha^2} = \varphi_n = \frac{d^2 \varphi_n}{d\alpha^2} = 0.$$

Інтегрування системи (4) є достатньо складним, тому для визначення критичного перепаду температури  $T_{кр}$  застосуємо перетворення Фур'є з метою переходу від системи (4) до еквівалентного інтегрального рівняння Фредгольма із симетричним ядром, для якого нескладно відшукати власне число.

Отже, разом з оригіналами  $\omega_n$  і  $\varphi_n$  розглянемо їх синус-трансформанти  $W(s)$  та  $\Phi(s)$ , які визначаються із формули

$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\alpha) \cdot \sin s \cdot \alpha \cdot d\alpha. \quad (5)$$

Застосовуючи до системи (4) перетворення (5), отримаємо

$$(s^2 + n^2)^2 \cdot W(s) = -\frac{4\lambda^4 s^2}{ER} \cdot \Phi(s) + 4\lambda^4 \cdot n^2 \cdot \alpha_1 \cdot T_{кр} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty \omega_n \cdot e^{-\lambda\alpha} \cdot \cos(\lambda\alpha) \cdot \sin(s\alpha) \cdot d\alpha; \quad (6)$$

$$(s^2 + n^2) \cdot \Phi(s) = ER \cdot s^2 \cdot W(s).$$

Виключивши  $\Phi(s)$  із системи (6), матимемо

$$[(s^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot s^4] \cdot W(s) = 4\lambda^4 \cdot \alpha_1 \cdot T_{кр} \cdot n^2 (s^2 + n^2)^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \int_0^\infty \omega_n \cdot e^{-\lambda\alpha} \cdot \cos(\lambda\alpha) \cdot \sin(s\alpha) \cdot d\alpha. \quad (7)$$

За теоремою про згортання трансформант [4] знаходимо

$$\int_0^\infty \omega_n \cdot e^{-\lambda\alpha} \cdot \cos(\lambda\alpha) \cdot \sin(s\alpha) \cdot d\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left( \frac{2\lambda^2 + (s - \xi)^2}{4\lambda^4 + (s - \xi)^4} - \frac{2\lambda^2 + (s + \xi)^2}{4\lambda^4 + (s + \xi)^4} \right) \cdot W(\xi) \cdot d\xi. \quad (8)$$

Якщо позначити

$$V(s) = \frac{\sqrt{(s^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot s^4}}{s^2 + n^2} \cdot W(s),$$

то рівняння (7) набирає вигляду

$$V(s) = T_{кр} \cdot \int_0^\infty K(s, \xi) \cdot V(\xi) \cdot d\xi, \quad (9)$$

де

$$K(s, \xi) = \frac{4\lambda^5 \cdot \alpha_1 \cdot n^2}{\pi} \cdot \frac{s^2 + n^2}{\sqrt{(s^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot s^4}} \cdot \frac{\xi^2 + n^2}{\sqrt{(\xi^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot \xi^4}} \times \left( \frac{2\lambda^2 + (s - \xi)^2}{4\lambda^4 + (s - \xi)^4} - \frac{2\lambda^2 + (s + \xi)^2}{4\lambda^4 + (s + \xi)^4} \right).$$

Таким чином, для визначення  $V(s)$  отримано однорідне інтегральне рівняння Фредгольма (9) другого роду із симетричним ядром  $K(s, \xi)$ . Критичну температуру  $T_{кр}$  можна розглядати як незалежний параметр. Найменше власне значення параметра  $T_{кр}$  є той мінімальний перепад температури, за якого оболонка втрачає стійкість. Згідно з теорією симетричних інтегральних рівнянь найменше власне значення  $T_{кр}$  можна визначити за формулою

$$\frac{1}{T_{кр}^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty K^2(s, \xi) \cdot ds \cdot d\xi. \quad (10)$$

Підставивши вираз  $K(s, \xi)$  у формулу (10), отримаємо шукану підсумкову формулу

$$T_{кр} = \frac{k_T}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \cdot \frac{\delta}{\alpha_1 R}, \quad (11)$$

де коефіцієнт  $k_T$  можна знайти з виразу

$$k_T = \frac{\pi}{4\lambda^3 \cdot n^2 \sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty k_s \cdot k_\xi \cdot \left[ \frac{2\lambda^2 + (s-\xi)^2}{4\lambda^4 + (s-\xi)^4} - \frac{2\lambda^2 + (s+\xi)^2}{4\lambda^4 + (s+\xi)^4} \right] ds d\xi}}; \quad (12)$$

$$k_s = \frac{(s^2 + n^2)^2}{(s^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot s^4}; \quad k_\xi = \frac{(\xi^2 + n^2)^2}{(\xi^2 + n^2)^4 + 4\lambda^4 \cdot \xi^4}.$$

Для аналізу коефіцієнта  $k_T$  шляхом його мінімізації виключимо з виразу (12) один з найбільш невизначених параметрів (кількість хвиль у кільцевому напрямку  $n$  при втраті стійкості оболонкою), замінивши абсолютні змінні параметри їх відносними величинами:  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$ ,  $\bar{s} = \frac{s}{n}$ ,  $\bar{\xi} = \frac{\xi}{n}$ . Тоді вираз (12) набуває такого вигляду:

$$k_T = \frac{\pi}{4\bar{\lambda}^3 \cdot n^2 \sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty k_{\bar{s}} \cdot k_{\bar{\xi}} \cdot \left[ \frac{2\bar{\lambda}^2 + (\bar{s}-\bar{\xi})^2}{4\bar{\lambda}^4 + (\bar{s}-\bar{\xi})^4} - \frac{2\bar{\lambda}^2 + (\bar{s}+\bar{\xi})^2}{4\bar{\lambda}^4 + (\bar{s}+\bar{\xi})^4} \right] d\bar{s} d\bar{\xi}}}; \quad (13)$$

$$k_{\bar{s}} = \frac{(\bar{s}^2 + \bar{n}^2)^2}{(\bar{s}^2 + \bar{n}^2)^4 + 4\bar{\lambda}^4 \cdot \bar{s}^4}; \quad k_{\bar{\xi}} = \frac{(\bar{\xi}^2 + \bar{n}^2)^2}{(\bar{\xi}^2 + \bar{n}^2)^4 + 4\bar{\lambda}^4 \cdot \bar{\xi}^4}.$$

Після мінімізації коефіцієнта  $k_T$  за параметром  $\bar{\lambda}$  для ізотропної оболонки отримаємо  $k_{T \min} = 5,48$  при  $\bar{\lambda} = 1,0$ .

Реальні конструкції мають цілком визначені геометричні розміри, тому необхідно бути впевненими, що при заданих параметрах  $R$ ,  $\delta$  та  $L$  оболонку можна вважати нескінченно довгою. Дослідження крайового ефекту при нагріванні показують [1], що ізотропну оболонку у випадку шарнірного закріплення на діафрагмі можна вважати довгою при  $L \geq 2,85 \cdot \sqrt{R \cdot \delta}$ . Для реальних оболонкових ємностей вказані умови практично завжди виконуються.

Для експрес-аналізу працездатності частково заповненої оболонкової ємності, яка знаходиться в температурному полі, за формулою (11) побудована крива стійкості (рис. 2) та визначені зони, топографія яких вказує на можливе або неможливе руйнування ємності в області крайового ефекту.

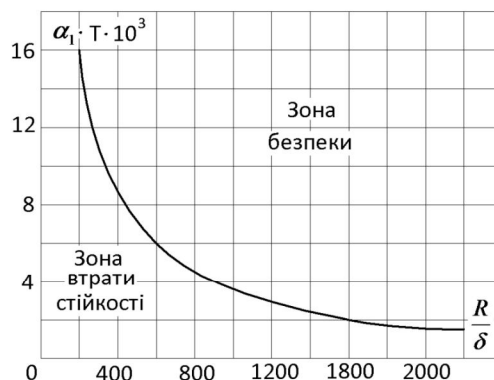


Рис. 2. Крива стійкості і зони працездатності ємності в полі температур

### Висновки

1. Запропонована у статті методика дослідження крайового ефекту нагрітої і частково заповненої рідиною оболонкової ємності дала можливість отримати в замкненій формі аналітичний вираз (11), за яким знаходиться критичний перепад температур  $T_{кр}$ .

2. Із аналізу формули (11) випливає, що величина  $T_{кр}$  більшою мірою залежить від співвідношення  $R/\delta$  з широким спектром зміни, ніж від коефіцієнта лінійного розширення  $\alpha_1$ , який для основних металевих конструктивних матеріалів є близьким за величиною.

3. Для оболонкових ємностей, які з часом спорожняються (паливні баки двигунів внутрішнього згоряння), слід передбачити захист від дії ненормованого теплового випромінювання. Допустимі температури нагрівання можна визначити в експрес-режимі за формулою (11) або з кривої графіка (рис. 2).

Список використаних джерел

1. Куршин, Л. М. Об устойчивости при нагреве цилиндрической оболочки с холодными диафрагмами [Текст] / Л. М. Куршин // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1962. – № 3. – 98 с.
2. Кабанов, В. В. Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии, внутреннем давлении и неравномерном нагреве по длине [Текст] / В. В. Кабанов // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1964. – № 4. – 86 с.
3. Власов, В. З. Избранные труды [Текст] / В. З. Власов. – Москва : Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.
4. Снеддон, И. Преобразование Фурье [Текст] / И. Снеддон – Москва : Изд-во иностр. лит, 1965. – 102 с.

Стаття надійшла до редакції 24.04.2018 р.

УДК 621.493

В. П. Ракивненко, В. А. Сало, А. Н. Кириченко, Л. А. Гребеник

**МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ЕМКОСТИ ПРИ НАГРЕВАНИИ**

*Рассматривается насущная проблема разрушения частично заполненной жидкостью оболочечной емкости при ее нагревании вследствие потери локальной (местной) устойчивости под действием перепада температуры на границе уровня заполнения.*

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* оболочечная емкость, “холодная” диафрагма, расчетная схема, краевой эффект, преобразования Фурье, длинная оболочка.

UDC 621.493

V. P. Rakivnenko, V. A. Salo, O. M. Kirichenko, L. A. Grebenik

**RESEARCH METHODS OF LOCAL DURABILITY OF A PARTLY LIQUID- FILLED CAPACITY AT HEATING**

*The article examines the urgent problem concerning possible destruction of a partly liquid-filled skinned capacity within the temperature field as a result of firmness loss on verge of filling level.*

*Skinned constructions used as capacities for storing and transporting highly dangerous liquids (Level 3 of danger), such as: oil products, nitrates, alkali, low-boiling substances are often within the temperature field, and possible destruction caused by their running-out might result in catastrophic effects. Therefore, to prevent such effects, one should have good understanding of the above mentioned phenomenon as well as recommendations as for safety maintenance of these capacities. Taking into consideration the complexity of calculation chart and mathematical model of this task, the authors applied the integral transformation of Fourier to solve the task that made it possible not only to simplify the decision but to get the result in the form of exclusive formula.*

*The analysis of the formula proves that the level of critical temperature greater depends on the ratio of radius to thickness with wide range of changes than on the coefficient of linear expansion that is close by its dimensions to basic metallic constructions. This formula and its graphic presentation make it possible in the mode of express-analysis to define durability of a partly liquid-filled skinned capacity within the temperature field that is extremely important both in the national economy and in the military sphere.*

*K e y w o r d s:* shell capacity, “cold” diaphragm, design scheme, edge effect, Fourier transforms, long shell.

**Ракивненко Валерія Павлівна** – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

**Сало Валентин Андрійович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

**Кириченко Олександр Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

**Гребеник Лариса Анатоліївна** – доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.