УДК 539.3

С. А. Соколовский, А. Н. Кириченко, В. П. Ракивненко, Л. А. Гребеник

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ УСЕЧЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПУТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Статья является продолжением работы [1], теоретические исследования в которой положены в основу расчёта динамической и статической прочности конических оболочек.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, уравнения Вольтерра, сходимость решений, ортотропные усеченные конические оболочки, область статической и динамической неустойчивости.

Постановка проблемы. Наиболее эффективной конструктивной формой сооружения является такая, которая при достаточной прочности и жесткости требует наименьшей затраты материала. Лучше всего этим условиям удовлетворяет тонкостенная оболочечная конструкция, которая находит широкое применение во многих отраслях машиностроения и строительстве, а также в качестве конструктивных элементов военной техники и вооружения.

Создание точных методов исследования, учитывающих влияние всевозможных факторов, связано со сложностью расчета и недостаточной очевидностью распределения усилий в элементах тонкостенных конструкций. Математика до сих пор не располагает методами решения в замкнутой форме сложных дифференциальных уравнений высокого порядка в частных производных, необходимыми конструктору для использования огромных возможностей, заложенных в тонкостенных сооружениях. Поэтому наибольшей популярностью у конструкторов пользуются методы, базирующиеся на решениях, известных из курсов сопротивления материалов и строительной механики. Эти методы, образно говоря, перебрасывают мост между теорией тонких оболочек и практикой инженерных расчетов [1–4].

Задачу о расчете оболочек вращения на произвольную нагрузку удобнее всего рассматривать в комплексной форме, что приводит к понижению порядка дифференциальных уравнений. Для семейства оболочек, радиусы кривизны которых подчиняются соотношению $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\text{const}$ (где θ – угловая координата), основная дифференциальная система уравнений оболочек распадается путем повторного применения комплексного преобразования на два независимых уравнения второго порядка. Данный результат может быть распространен и на оболочки вращения произвольной формы [3].

Анализ последних исследований и публикаций. Большинство задач строительной механики описывается системой дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, решения которых достаточно сложны и громоздки, за которыми порой непросто проследить инженерную сущность проблемы [1, 3].

В основу изложенного в статье исследования положен известный метод профессора С. Н. Кана [2] в прикладной теории тонкостенных конструкций. Раскрытие многократно статической неопределимости такой конструкции, где в качестве неизвестных выступают не числа, а функции, проводится приёмами строительной механики с применением энергетических принципов; при этом могут быть учтены усложнения силовой схемы и варианты граничных условий.

В отличие от исследований, проведенных в работах [3, 4], преимущество данного метода решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами заключается в его простоте и в том, что задачу можно решать с любой наперед заданной степенью точности.

Цель статьи – построение методики экспресс-анализа статической и динамической неустойчивости ортотропных конических оболочек при различных видах нагружения.

Изложение основного материала. Как указывалось в работе [5], корни трансцендентного уравнения

$$\sum_{m=1}^{n} Q_m(\lambda,H,\varepsilon)\,\text{ch}\Big[(\lambda,H)_m+\beta_m(\lambda,H,\varepsilon)\Big]=0\,, \tag{1}$$

где $Q_m(\lambda,H,\varepsilon)=\sqrt{b_m^2(\lambda,H,\varepsilon)-a_m^2(\lambda,H,\varepsilon)}$; $\beta_m(\lambda,H,\varepsilon)=\text{arctg}\dfrac{a_m^2(\lambda,H,\varepsilon)}{b_m^2(\lambda,H,\varepsilon)}$ определяют собственные числа задачи, т. е. критические нагрузки или частоты собственных колебаний.

Если $\lambda_j\left(j=1,2,3,\ldots n\right)$ – корни характеристического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\lambda^k=0$, среди которых кратные корни отсутствуют, тогда выражение для первого приближения искомой функции можно представить в таком виде:

$$\psi_1\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n} C_j\cdot e^{\lambda_j\cdot x}\left[1-S_j\left(x\right)\right], \tag{2}$$

где $S_j\left(x\right)=\dfrac{1}{\varphi_j\left(x\right)}\sum\limits_k\int\limits_0^k S_k\left(x,\xi\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}^k\varphi_j}{\mathrm{d}\xi^k}\mathrm{d}\xi$; $\varphi_j\left(x\right)=e^{\lambda_j\cdot x}$.

Можно показать, что (m +1)-е приближение искомой функции будет пропорционально $\dfrac{\varepsilon_k^{m+1}}{\left(m+1\right)!}$, откуда следует, что скорость сходимости тем выше, чем меньше параметр ε_k .

В соответствии с исследованиями [3] для большинства задач строительной механики достаточно ограничиться первым приближением.

Для задач строительной механики оболочек решение уравнения (1) даёт возможность определить собственные функции (числа) упругой системы с произвольными граничными условиями и нагружением.

Заметим, что нечетные коэффициенты a_k линейно зависят от малого параметра, тогда нечетными коэффициентами в характеристическом уравнении можно практически пренебречь, что приводит к взаимной обратности корней, т. е. $\lambda_2=-\lambda_1$ и $\lambda_4=-\lambda_3$. Тогда уравнение (1) примет такой вид:

$$\sum_{m=1}^{2} Q_m\left(\bar{\lambda},H,\varepsilon_k\right)\cdot\mathrm{ch}\left\{\left[\bar{\lambda}_1-\left(-1\right)^m\cdot\lambda_3\right]\cdot H+\beta_m\left(\lambda,H,\varepsilon_k\right)\right\}+Q_3\left(\bar{\lambda},H,\varepsilon_k\right)\cdot\mathrm{ch}\beta_3\left(\lambda,H,\varepsilon_k\right)=0. \tag{3}$$

Рассмотрим пример определения собственных чисел усеченной конструктивно-ортотропной конической оболочки для различных случаев опирания краёв и нагружения (рис. 1).

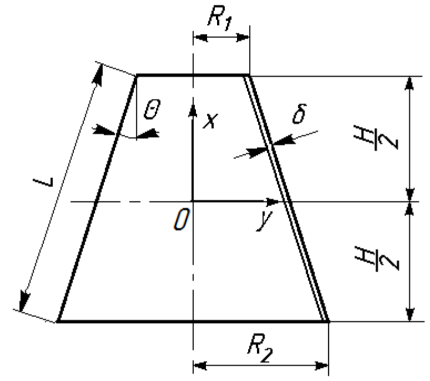

Рис. 1. Усеченная коническая оболочка

Предварительно запишем разрешающее уравнение в виде

$$\vartheta=\vartheta_0\cdot\eta , \tag{4}$$

где ϑ – искомое собственное число; ϑ_0 – собственное число некоторой аппроксимирующей оболочки с постоянными параметрами (для конической оболочки таковой является цилиндрическая, радиус которой равен среднему арифметическому радиусу кривизны, высота – длине образующей, а толщина – средней арифметической толщине исходной поверхности); η -коэффициент влияния изменяемости параметров конической оболочки.

Из формулы (4) следует, что задача по отысканию собственного числа ϑ состоит из основной и дополнительной. В основной задаче отыскивается решение уравнения с постоянными коэффициентами, которое определяет число ϑ_0. Дополнительная задача связана с нахождением коэффициента влияния изменяемости параметра конической оболочки η.

Для случая шарнирного опирания краёв оболочки имеем:

$$k = \begin{cases} 0 \text{ при } i = 1,2; \\ 2 \text{ при } i = 3,4. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда, с точностью до величины второго порядка малости относительно $\varepsilon_к$, находим

$$Q_m(\lambda, H, \varepsilon) = \begin{cases} 2\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)^2 \text{ при } m = 1; \\ -2\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)^2 \text{ при } m = 2; \\ 0 \text{ при } m = 3. \end{cases} \tag{6}$$

Подставив выражение (6) в формулу (3) и, полагая $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 \neq 0$, получим разрешающее трансцендентное уравнение

$$\mathrm{sh}\left[\lambda_1 H + \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon)\right] \cdot \mathrm{sh}\left[\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon)\right] = 0, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\beta_1(\lambda, H, \varepsilon) + \beta_2(\lambda, H, \varepsilon)\right]; \\ \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\beta_1(\lambda, H, \varepsilon) + \beta_2(\lambda, H, \varepsilon)\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

В результате решения уравнения (7) и с учетом уравнения (4) для устойчивости от внешнего давления и собственных колебаний получим соответственно:

$$\vartheta_0 = \begin{cases} \dfrac{4}{3} m\pi \dfrac{1}{LR^{3/2}} \cdot \sqrt[4]{3ED_ш^3 \delta_c}; \\ m\pi \sqrt{\dfrac{2\sqrt{ED_ш \delta_c}}{\rho L^2 R_{cp} \delta_\Sigma}}; \end{cases} \tag{9}$$

$$\eta = 1 + \frac{1}{2m\pi} \mathrm{arctg} \begin{cases} \dfrac{2{,}72 m\pi z^2}{1 - 0{,}36 m^2 \pi^2 z^2} \text{ при } \lambda \to 0; \\ \dfrac{1{,}3 m\pi z^2}{1 + 0{,}16 m^2 \pi^2 z^2} \text{ при } \lambda \to 1; \end{cases} \tag{10}$$

где L – длина оболочки по образующей; R_1 и R_2 – соответственно радиусы меньшего и большего оснований усеченного конуса; $R_{cp} = \dfrac{R_1 + R_2}{2\cos\theta}$ – главный радиус кривизны среднего сечения конуса; $D_ш, \delta_C$ и δ_Σ – соответственно приведенная изгибная жесткость в продольном сечении, толщина с учетом стрингеров и суммарная толщина оболочки [2]; E – модуль Юнга; ρ – плотность материала; m = 1, 2, 3… – числа натурального ряда; $z = \dfrac{1 - \dfrac{R_1}{R_2}}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$; $\bar{\lambda} = \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$.

Для достаточно тонких $\left(\frac{R_{cp}}{\delta} > 100\right)$ и длинных ($L > 2R_{cp}$) цилиндрических оболочек, которые в данной задаче являются аппроксимирующими (4), выражения для внешнего критического давления $P_{кр_0}$ и частоты собственных колебаний ω_0 известны [2]:

$$P_{кр_0} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3D_ш \cdot E \cdot \delta_c}{R_{cp}^{10}} \cdot \left(\frac{\pi R_{cp}}{L}\right)^2} \quad \text{и} \quad \omega_0 \approx \sqrt{\frac{E \cdot g}{\rho \cdot R_{cp}^2}}. \tag{11}$$

Для оболочки с жестко заделанными краями, когда

$$k = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ i = 1, 2; \\ 1 \ \text{при} \ i = 3, 4, \end{cases} \tag{12}$$

будем иметь

$$Q_m(\lambda, H, \varepsilon) = \begin{cases} -2\left(\lambda_1 - \lambda_3\right)^2 \ \text{при} \ m = 1; \\ 2\left(\lambda_1 - \lambda_3\right)^2 \ \text{при} \ m = 2; \\ -8\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ \text{при} \ m = 3. \end{cases} \tag{13}$$

В этом случае разрешающее уравнение примет такой вид:

$$\begin{gathered} 2\overline{\lambda} = \left\{\mathrm{ch}\left[\lambda_1 H + \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon)\right] \cdot \mathrm{ch}\left[\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon)\right] - \mathrm{ch}\beta_3(\lambda, H, \varepsilon)\right\} - \\ -\left(1 - \overline{\lambda}^2\right)\mathrm{sh}\left[\lambda_1 H + \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon)\right] \cdot \mathrm{ch}\left[\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon)\right] = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Для достаточно тонких и не очень коротких оболочек параметр $\overline{\lambda}$ находится в пределах

$$0 \le \overline{\lambda} \le 1. \tag{15}$$

С учетом предельных случаев (15) формула (14) распадается на два независимых уравнения:

$$\mathrm{sh}\left[\lambda_1 H + \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon)\right] \cdot \mathrm{sh}\left[\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon)\right] = 0 \ \text{при} \ \overline{\lambda} \to 0; \tag{16}$$

$$\mathrm{ch}\left[\lambda_1 H + \gamma_1(\lambda, H, \varepsilon)\right] \cdot \mathrm{ch}\left[\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon)\right] - \mathrm{ch}\beta_3(\lambda, H, \varepsilon) = 0 \ \text{при} \ \overline{\lambda} \to 1. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) для шарнирного опирания краёв оболочки уже рассмотрено, а решение уравнения (17) с учетом малости параметра $\beta_3(\lambda, H, \varepsilon)$ возможно при условии $\lambda_3 H + \gamma_3(\lambda, H, \varepsilon) = \frac{2m+1}{2}\pi.$

Следовательно, для задачи с жестко заделанными краями оболочки в выражении (10) при $\overline{\lambda} \to 1$ вместо $m\pi$ следует записать $\frac{2m+1}{2}\pi$.

Полученные результаты справедливы и для гладких оболочек, которые являются частным случаем конструктивно-ортотропных систем.

На рис. 2 для случая m = 1 построена область статической и динамической неустойчивости усеченных конических оболочек, т. е. зависимость $\eta = f\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$. Данная область правомерна для обеих рассмотренных задач, поскольку параметр η пропорционален коэффициенту ε_k, одинаковому для задач устойчивости и колебаний. Искомые значения собственных чисел для реальных оболочек будут находиться внутри области, ограниченной предельными случаями $\overline{\lambda} = 0$ и $\overline{\lambda} = 1$.

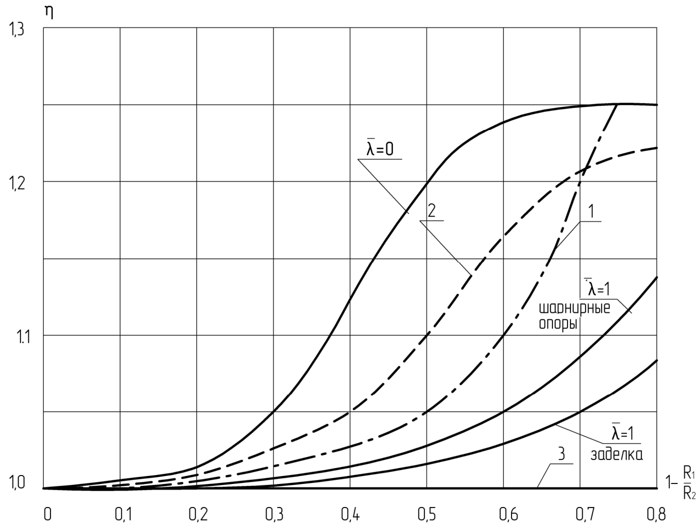

Рис. 2. Область неустойчивости оболочек

Для бесконечно длинных оболочек (или кольца) область неустойчивости вырождается в прямую 3. На рис. 2 она доведена до значения аргумента $1-\frac{R_1}{R_2}=0{,}8$, так как при решении задачи в области $1-\frac{R_1}{R_2}>0{,}8$ в разложениях для переменного параметра *R* необходимо учитывать величины второго и выше порядка малости.

Для сравнительной оценки предлагаемых решений на рис. 2 приведены экспериментальные данные из работ [6] (кривая 1) и [7] (кривая 2), которые вписываются в область неустойчивости с погрешностью порядка 5 %.

Выводы

1. В статье рассмотрен один из подходов к определению собственных чисел тонкостенных оболочек, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Используя метод итераций, решения полученных уравнений типа Вольтерра удобно строить с помощью несложных компьютерных программ.

2. Показано, что для семейства оболочек, радиусы кривизны которых подчиняются соотношению $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\mathrm{const}$, основная дифференциальная система уравнений оболочек при повторном комплексном преобразовании распадается на два независимых уравнения второго порядка, решение которых известно из теории тонких оболочек.

3. Для частного случая (усеченные конические оболочки) построена область статической и динамической неустойчивости, позволяющая в экспресс-режиме определять несущую способность таких оболочек с разными нагрузочными, геометрическими и жесткостными характеристиками, что может быть полезным в практике инженерных расчетов, а также, что немаловажно, при оценке надежности элементов конструкций боевой техники и вооружения, выполненных в виде конических оболочек.

Список использованных источников

1. Власов, В. З. Избранные труды [Текст] / В. З. Власов. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.

2. Кан, С. Н. Строительная механика оболочек [Текст] / С. Н. Кан. – М. : Машиностроение, 1966. – 508 с.

3. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Л. : Госиздат, 1962. – 432 с.

4. Колкунов, И. В. Основы расчета упругих оболочек [Текст] / И. В. Колкунов. – М. : Высш. шк., 1963. – 109 с.

5. Приближенные решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами применительно к задачам строительной механики [Текст] / С. А. Соколовский, А. Н. Кириченко, В. П. Ракивненко, Л. А. Гребеник // Збірник наукових праць Академії ВВ МВС України. – Х. : Акад. ВВ МВС України, 2014. – Вип. 1 (23). – С. 86–89.

6. Серпико, И. Упругая устойчивость осесимметрично нагруженных конических и цилиндрических оболочек [Текст] / И. Серпико // Ракетная техника и космонавтика. – 1963. – Вып. I. – С. 87–96.

7. Seide P. M. On the Duckling of Truncated Conical shells under Uniform Hydrostatic Pressure. Space Technology Lbs, № E 9-9, 1969. – 143 с.

Стаття надійшла до редакції 24.05.2016 р.

УДК 539.3

С. А. Соколовський, О. М. Кириченко, В. П. Ракiвненко, Л. А. Гребеник

ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНОЇ І ДИНАМІЧНОЇ МІЦНОСТІ ЗРІЗАНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ШЛЯХОМ КОМПЛЕКСНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Стаття є продовженням праці [1], теоретичні дослідження в якої взяті за основу розрахунку динамічної і статичної міцності конічних оболонок.

К л ю ч о в і с л о в а: диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, рівняння Вольтерра, збіжність рішень, ортотропні зрізані конічні оболонки, область статичної та динамічної нестійкості.

UDC 539.3

S. A. Sokolovskyi, O. M. Kirichenko, V. P. Rakivnenko, L. A. Grebenik

DETERMINATION STATIC AND DYNAMIC DURABLE-STI TRUNCATED CONICAL SHELLS THROUGH COMPLEX GOVERNMENTAL PREOBROZOVANY EQUATIONS FOR DUCH STRUCTURAL MECHANICS

This article is a continuation of [1], theoretical studies which form the basis for the calculation of dynamic and static stronglysti conical shells.

K e y w o r d s: differential equations with variable coefficients, Volterra equations, convergence of solutions, orthotropic truncated conical shell, the area of static and dynamic instability

Соколовський Сергій Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, перший заступник начальника Національної академії Національної гвардії України з навчально-методичної та наукової роботи.

Кириченко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Ракiвненко Валерія Павлівна – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Гребеник Лариса Анатоліївна – старший викладач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.