

УДК 539.3

В. А. Сало, П. І. Літовченко, В. М. Нечипоренко

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У СФЕРИЧНІЙ КОНСТРУКЦІЇ ЗА РІЗНИХ СПОСОБІВ ЗАКРІПЛЕННЯ ОТВОРІВ

Пропонованим методом вирішена просторова задача про напружений стан товстостінної сферичної оболонки під дією рівномірного тиску. У методі використані варіаційний принцип Рейснера, теорія R -функцій, загальні рівняння тривимірної теорії пружності, метод І. М. Векуа й алгоритм двостороннього оцінювання точності наближених розв'язків змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на чисельних прикладах.

Ключові слова: варіаційний принцип Рейснера, теорія R -функцій, ортотропна сферична оболонка з отворами.

Постановка проблеми. Незважаючи на накопичений матеріал розрахунків різних оболонок, більшість з існуючих методів досліджень приводять до розрахункових моделей, що не завжди дозволяють обґрунтувати вибір конструктивних параметрів нетонких оболонок, послаблених отворами. Істотний прогрес у досягненні достовірних результатів розв'язування в просторовій постановці крайових задач оболонок неможливий без використання основних співвідношень тривимірної теорії пружності і застосування сучасних ПК. У зв'язку з цим існує актуальна потреба у створенні універсальних і алгоритмічно простих для чисельної реалізації методів розрахунку анізотропних товстостінних оболонок з отворами довільних розмірів і форм.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. За висловом академіка В. В. Новожилова, немає нічого практичнішого, ніж гарна теорія. Наразі відома велика кількість різноманітних і суперечних варіантів уточнених теорій оболонок, однак, їхній достаток створює певні утруднення у виборі та практичному застосуванні конкретної моделі оболонки. Для повного аналізу напружено-деформованого стану довільно навантажених оболонкових елементів, а також у задачах із вивчення просторової концентрації напружень біля отворів необхідно використовувати тривимірну теорію пружності й узагальнені теорії оболонок, що засновані на заміні розв'язку тривимірної задачі регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач.

Пропонований метод. Розв'язуванню сформульованої проблеми присвячена монографія [1], у якій надані класифікація і докладний аналіз відомих у науковій літературі уточнених теорій оболонок, розглянутий сучасний стан проблеми визначення концентрації напружень в оболонках з отворами та запропонований теоретично обґрунтований і чисельно реалізований автором новий ефективний RVR-метод розрахунку на міцність і жорсткість статично навантажених пружних оболонок, зокрема пластин довільної товщини. Метод заснований на використанні змішаного варіаційного принципу Рейснера, методу І. М. Векуа, теорії R -функцій і загальних рівнянь просторових задач теорії пружності, що дозволяє визначити напружено-деформований стан в оболонках з отворами довільних розмірів і форм. При цьому в RVR-методі створені структури розв'язків, які точно задовольняють різним варіантам граничних умов досліджуваних просторових задач.

Мета статті полягає у дослідженні концентрації напружень в статично навантажених сферичних елементах конструкцій, послаблених отворами, за допомогою використання запропонованого нового чисельного методу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Покажемо ефективність застосування RVR-методу [1] на прикладі розрахунку напружено-деформованого стану ортотропної сферичної оболонки із двома рівними полюсними отворами однакового радіуса r_0 під дією внутрішнього тиску інтенсивності q_0 . Введемо в серединній поверхні Ω_s оболонки радіуса R ортогональну систему координат θ, φ і z (лінії головної кривини оболонки). Тут θ – кут між нормаллю до Ω_s і віссю обертання; φ – кут між фіксованими меридіанними площинами; z – відстань уздовж нормалі до серединної поверхні Ω_s ($-h/2 \leq z \leq h/2$). Введемо позначення $\theta = [(\theta_2 - \theta_1) \vartheta + \theta_1 + \theta_2] / 2$. Поверхня Γ оболонки довільної товщини h складається з бічних Γ_θ поверхонь отворів і лицьових поверхонь:

внутрішньої $\Gamma^- (z = -h/2)$ і зовнішньої $\Gamma^+ (z = h/2)$, рівняння яких визначаються функціями ω_θ і ω_+, ω_- :

$$\left. \begin{aligned} \omega_\theta &= 1 - \vartheta^2; & |\vartheta| &\leq 1; & \zeta &= 2z/h; \\ \omega_+ &= 1 - \zeta; & \omega_- &= 1 + \zeta; & \omega_\zeta &= \omega_+ \omega_- \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Нехай $\chi = 1 + h\zeta/2R$ – множник, що враховує зміну метрики оболонки по товщині. При дослідженні вісесиметричної задачі ($u_2 = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{23} = 0$) варіаційне рівняння Рейснера має для сферичної оболонки такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ - \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \operatorname{ctg} \theta + \sigma_{13} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{13}}{\partial z} \right] \delta u_1 - \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} + \sigma_{13} \operatorname{ctg} \theta - \sigma_{11} - \sigma_{22} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{33}}{\partial z} \right] \delta u_3 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_3 \right) - \frac{1}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{11} + \right. \\ & \left. + \dots + \left[\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{22} \right] \delta \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_1 \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \right] \delta \sigma_{13} \right\} 2\pi R^2 \chi^2 \sin \theta d\theta dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Розглянемо випадки, коли поверхні отворів Γ_θ вільні (a), шарнірно (b) чи жорстко (c) закріплені. Крайові умови задачі мають такий вигляд.

$$\Gamma^+ : \sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = 0; \quad \Gamma^- : \sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = -q_0. \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} a) & \sigma_{11} = 0, \sigma_{13} = 0; \\ b) & u_1^k = 0 (k \neq 1), \sigma_{11}^k = 0 (k = 1), u_3 = 0; \\ c) & u_1 = 0, u_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Структури розв'язків крайових задач. Представимо шукані компоненти переміщень u_i вектора u і напружень σ_{ij} тензора σ рядами:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=0}^{l_1-1} \left[1 + b_{1k} (\omega_\theta - 1) \right] \sum_{p=0}^{m_1} u_1^{n_1} u_1^k (\theta, \varphi) P_k (\zeta); \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{l_3-1} \left[1 + b_{3k} (\omega_\theta - 1) \right] \sum_{p=0}^{m_3} u_3^{n_3} u_3^k (\theta, \varphi) P_k (\zeta); \\ \chi \sigma_{22} &= \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} \sigma_{22}^{n_{22}} \sigma_{22}^k (\theta, \varphi) P_k (\zeta); \\ \chi \sigma_{13} &= \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{13}-1} \left[b_{3k} + \omega_\theta (1 - b_{3k}) \right] \sum_{p=0}^{m_{13}} \sigma_{13}^{n_{13}} \sigma_{13}^k (\theta, \varphi) P_k (\zeta); \\ \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} \sigma_{33}^{n_{33}} \sigma_{33}^k (\theta, \varphi) P_k (\zeta); \quad \sigma_{33}^* = -\frac{(1-h/2R)^2}{2} q_0 \omega_+. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

У формулах (5) $u_i^{n_i}$ і $\sigma_{ij}^{n_{ij}}$ – шукані сталі; $u_i^k(\theta, \varphi)$, $\sigma_{ij}^k(\theta, \varphi)$ – апроксимуючі функції; $n_i = k(m_i + 1) + p + 1$ ($n_i \Rightarrow n_{ij}$); $P_k(\zeta)$ – поліноми Лежандра.

Сталі b_{1k} і b_{3k} необхідні для того, щоб у записі крайових умов не зустрічалися взаємно відповідні величини з переміщень і напружень. Зсувна модель оболонки визначається числами l_i, l_{ij} апроксимацій компонент \mathbf{u} і $\boldsymbol{\sigma}$ по товщині оболонки. Вибрана зсувна модель відповідає (при $i=1,2$) комбінації величин $(l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$, їх задання у програмі дозволяє автоматично переходити до різних побудованих двовимірних теорій. Так, варіант $(2, 1, 2, 1, 0)$ відповідає теорії оболонок типу Тимошенка; $(2, 2, 2, 2, 1)$, $(4, 2, 4, 2, 1)$ і $(4, 3, 4, 3, 2)$ – різним існуючим прикладним теоріям оболонок [2–4].

Результати розрахунку. Чисельна реалізація задачі виконана для сферичного поясу при $E_1 = 20$ ГПа, $G_{13} = 0.05E_1$, $\nu_{ij} = 0.3$, $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$. На основі використання зсувної моделі $l_i = l_{ij} = 5$ на рисунках 1 і 2 представлені графіки розподілу зведених переміщень $\tilde{u}_i = 10^4 u_i/h$ і напружень $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/q_0$ уздовж меридіана поверхні Ω_s нетонкої оболонки ($h/R = 0.2$).

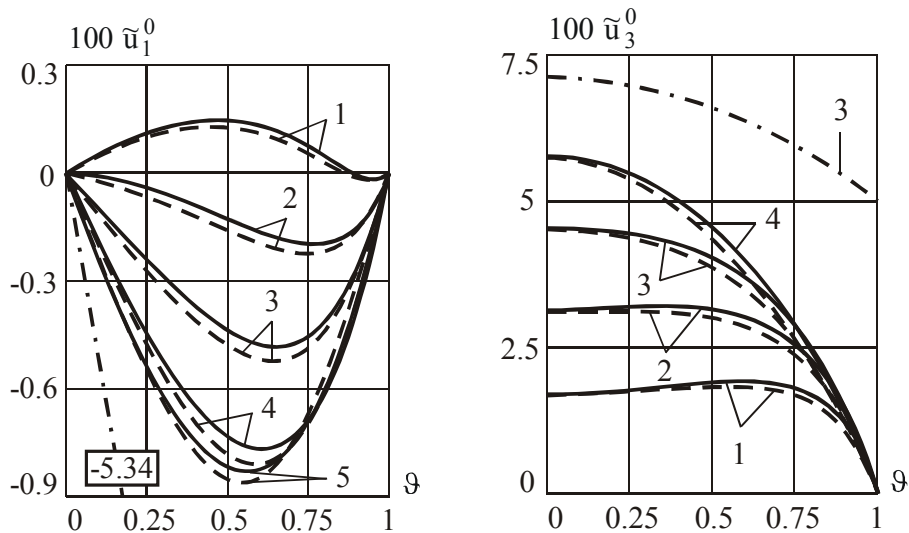


Рис. 1. Графіки осьового \tilde{u}_1^0 і радіального \tilde{u}_3^0 переміщень

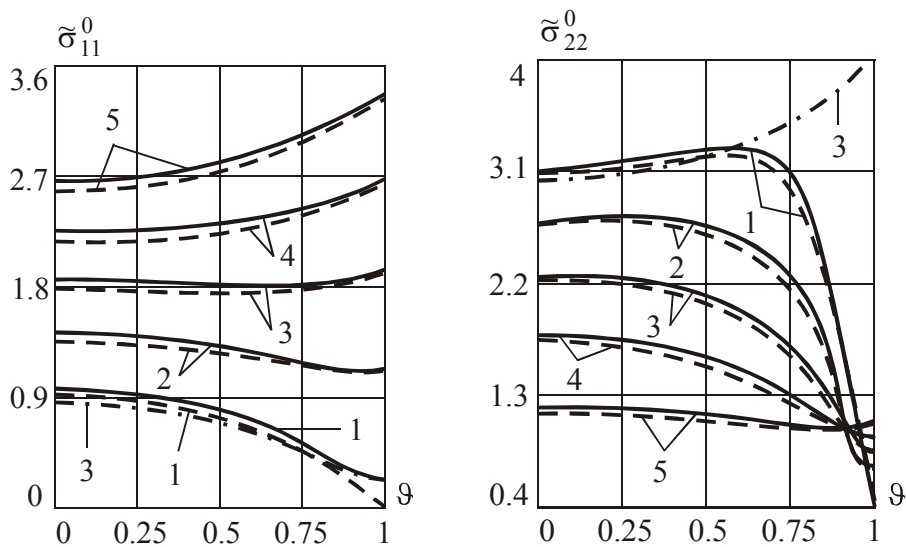


Рис. 2. Графіки осьового $\tilde{\sigma}_{11}^0$ і окружного $\tilde{\sigma}_{22}^0$ напружень

Неперервними лініями на рисунках зображені графіки для крайових умов 4b, штриховими – для 4с, штрихпунктирними – для 4а. Цифри 1, 2, 3, 4, 5 біля побудованих графіків відповідають значенням $E_{22}/E_{11} = 5, 2, 1, 0.5, 0.2$.

Залежно від зсувної моделі для трансверсально-ізотропної ($E_{22}/E_{11} = 1$) товстостінної ($h/R = 0.5$) оболонки у таблиці 1 для шарнірно (у чисельниках) і жорстко закріплених (у знаменниках) отворів представлені результати обчислень співвідношень функціоналів Лагранжа I_L , Кастильяно I_K і Рейснера I_R та переміщень (аналогічно до напружень) \tilde{u}_i^- , \tilde{u}_i^0 , \tilde{u}_i^+ (при $\zeta = -1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$ відповідно) у перетині $\vartheta = 0.5$ сферичної оболонки.

Т а б л и ц я 1
Значення шуканих величин залежно від вибраної зсувної моделі

$(l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$	(2, 2, 2, 2, 1)	(4, 2, 4, 2, 1)	(4, 3, 4, 3, 2)	(5, 5, 5, 5, 5)
I_L/I_R	$\frac{0.82159}{0.78020}$	$\frac{0.84134}{0.78961}$	$\frac{0.97808}{0.97179}$	$\frac{0.99590}{0.99497}$
I_L/I_R	$\frac{1.10994}{1.14028}$	$\frac{1.10426}{1.13933}$	$\frac{1.05143}{1.09644}$	$\frac{1.00442}{1.01299}$
$10\tilde{u}_1^0$	$\frac{-0.537}{-0.537}$	$\frac{-0.538}{-0.538}$	$\frac{-0.541}{-0.551}$	$\frac{-0.544}{-0.556}$
$10\tilde{u}_3^0$	$\frac{5.015}{4.899}$	$\frac{5.014}{4.897}$	$\frac{4.782}{4.635}$	$\frac{4.780}{4.631}$
$10\tilde{\sigma}_{11}^-$	$\frac{4.867}{6.902}$	$\frac{4.931}{6.419}$	$\frac{4.948}{6.743}$	$\frac{5.021}{6.848}$
$10\tilde{\sigma}_{11}^0$	$\frac{4.963}{4.874}$	$\frac{4.911}{4.941}$	$\frac{4.779}{4.710}$	$\frac{4.796}{4.690}$
$10\tilde{\sigma}_{11}^+$	$\frac{4.900}{3.657}$	$\frac{4.990}{3.714}$	$\frac{5.407}{4.162}$	$\frac{5.414}{4.204}$
$10\tilde{\sigma}_{22}^-$	$\frac{8.333}{8.457}$	$\frac{8.363}{8.598}$	$\frac{8.646}{8.740}$	$\frac{8.803}{8.924}$
$10\tilde{\sigma}_{22}^0$	$\frac{5.775}{5.674}$	$\frac{5.699}{5.628}$	$\frac{5.589}{5.480}$	$\frac{5.580}{5.471}$
$10\tilde{\sigma}_{22}^+$	$\frac{4.239}{3.904}$	$\frac{4.259}{3.981}$	$\frac{4.514}{4.211}$	$\frac{4.545}{4.292}$
$10\tilde{\sigma}_{33}^0$	$\frac{-2.892}{-2.684}$	$\frac{-2.892}{-2.683}$	$\frac{-2.883}{-2.587}$	$\frac{-2.871}{-2.644}$

Залежно від товщини та анізотропії матеріалу оболонки при використанні зсувної моделі $l_i = l_j = 5$ для шарнірно (у чисельниках) і жорстко закріплених (у знаменниках) отворів у таблиці 2 представлені значення переміщень і напружень у перерізі $\vartheta = 0.5$ меридіана серединної поверхні Ω_s .

Як впливає із результатів таблиці 2, у розглянутих прикладах збільшення жорсткості E_{22}/E_{11} у досліджуваному інтервалі [0.2 – 5] спричинює істотну зміну шуканих переміщень і напружень.

Таблиця 2

Значення шуканих величин залежно від товщини оболонки та анізотропії матеріалу

Шукана величина	$\frac{h}{R}$	E_{22}/E_{11}				
		5	2	1	0.5	0.2
$10\tilde{u}_1^0$	$\frac{1}{5}$	<u>1.494</u>	<u>-1.230</u>	<u>-4.351</u>	<u>-7.382</u>	<u>-8.116</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>1.297</u>	<u>-1.575</u>	<u>-4.801</u>	<u>-7.857</u>	<u>-8.382</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>0.125</u>	<u>-0.194</u>	<u>-0.544</u>	<u>-0.863</u>	<u>-0.916</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>0.113</u>	<u>-0.209</u>	<u>-0.556</u>	<u>-0.866</u>	<u>-0.918</u>
$10\tilde{u}_3^0$	$\frac{1}{5}$	<u>18.80</u>	<u>31.21</u>	<u>40.66</u>	<u>45.54</u>	<u>36.63</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>18.48</u>	<u>30.33</u>	<u>39.21</u>	<u>43.76</u>	<u>35.38</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>2.354</u>	<u>3.743</u>	<u>4.780</u>	<u>5.338</u>	<u>4.437</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>2.327</u>	<u>3.654</u>	<u>4.631</u>	<u>5.145</u>	<u>4.259</u>
$10\tilde{\sigma}_{11}^0$	$\frac{1}{5}$	<u>7.997</u>	<u>13.35</u>	<u>18.36</u>	<u>23.26</u>	<u>28.22</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>7.769</u>	<u>12.90</u>	<u>17.71</u>	<u>22.46</u>	<u>27.53</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>2.012</u>	<u>3.445</u>	<u>4.796</u>	<u>6.115</u>	<u>7.459</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>1.981</u>	<u>3.378</u>	<u>4.690</u>	<u>5.975</u>	<u>7.332</u>
$10\tilde{\sigma}_{22}^0$	$\frac{1}{5}$	<u>32.67</u>	<u>26.84</u>	<u>21.19</u>	<u>16.04</u>	<u>11.40</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>32.22</u>	<u>26.20</u>	<u>20.55</u>	<u>15.52</u>	<u>11.12</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>8.486</u>	<u>7.045</u>	<u>5.580</u>	<u>4.235</u>	<u>3.021</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>8.427</u>	<u>6.942</u>	<u>5.471</u>	<u>4.142</u>	<u>2.968</u>
$10\tilde{\sigma}_{33}^0$	$\frac{1}{5}$	<u>-4.065</u>	<u>-4.243</u>	<u>-4.354</u>	<u>-4.418</u>	<u>-4.410</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>-4.009</u>	<u>-4.104</u>	<u>-4.148</u>	<u>-4.158</u>	<u>-4.107</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>-2.381</u>	<u>-2.709</u>	<u>-2.871</u>	<u>-2.970</u>	<u>-2.987</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>-2.341</u>	<u>-2.567</u>	<u>-2.644</u>	<u>-2.671</u>	<u>-2.618</u>
$10\tilde{\sigma}_{13}^0$	$\frac{1}{5}$	<u>0.410</u>	<u>0.407</u>	<u>0.255</u>	<u>-0.164</u>	<u>-0.716</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>0.152</u>	<u>0.015</u>	<u>-0.342</u>	<u>-0.841</u>	<u>-1.271</u>
	$\frac{1}{2}$	<u>0.065</u>	<u>0.028</u>	<u>-0.083</u>	<u>-0.229</u>	<u>-0.336</u>
	$\frac{1}{5}$	<u>0.015</u>	<u>-0.068</u>	<u>-0.208</u>	<u>-0.366</u>	<u>-0.444</u>

Висновки

Отримані результати дають наочне уявлення про напружено-деформований стан пружної оболонкової конструкції, залежно від анізотропії матеріалу оболонки і способу закріплення отворів, та підтверджують можливість ефективного використання RVR-методу для розрахунку ортотропних оболонок з отворами на міцність і жорсткість.

Виконаний авторами чималий обсяг чисельних досліджень збіжності результатів підтверджує обґрунтованість застосування запропонованого в монографії [1] нового RVR-методу.

Засобом перевірки вірогідності результатів може стати використовуваний у дослідженні програмно реалізований алгоритм інтегрального двоїстого оцінювання чисельних розв'язків, що дозволяє автоматизувати пошук такої кількості апроксимацій, за якої процес збіжності отриманих наближених результатів набуває стійкого характеру.

Список використаних джерел

1. Сало, В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями [Текст] : монография / В. А. Сало. – Х. : НТУ “ХПИ”, 2003. – 216 с.
2. Григоренко, Я. М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [Текст] / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Г. П. Голуб. – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.
3. Пикуль, В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела [Текст] / В. В. Пикуль. – М. : Наука, 1989. – 221 с.
4. Родионова, В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек [Текст] / В. А. Родионова, Б. Ф. Титаев, К. Ф. Черных. – С Пб. : Изд-во С Пб. ун-та, 1996. – 278 с.

Стаття надійшла до редакції 14.01.2015 р.