УДК 539.3

С. А. Соколовский, А. Н. Кириченко, В. П. Ракивненко, Л. А. Гребеник

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В работе рассматривается методика построения последовательных приближений решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые с помощью интегральных преобразований Лапласа и основных теорем операционного исчисления сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям Вольтерра.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, преобразования Лапласа, интеграл Бромвича, уравнения Вольтерра, сходимость решений.

Постановка проблеми. Большинство задач строительной механики описывается системой дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, решения которых достаточно сложны и громоздки, за которыми трудно проследить инженерную сущность проблемы.

В основу данного исследования положен известный метод профессора С. Н. Кана [1] в прикладной теории тонкостенных конструкций. Раскрытие многократно статической неопределимости такой конструкции, где в качестве неизвестных выступают не числа, а функции, проводится приёмами строительной механики с применением энергетических принципов. При этом могут быть учтены усложнения силовой схемы и варианты граничных условий.

Полученные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами с помощью преобразований Лапласа и интеграла Бромвича [2] сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям Вольтерра. Решения последних строится методом приближений при удовлетворении соответствующих краевых условий.

Преимущество данного метода решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами по сравнению, например, с вариационным методом Бубнова–Галеркина заключается в его простоте и в том, что задача может решаться с любой наперед заданной степенью точности.

При этом представляется возможным с помощью некоторого равномерно сходящегося числового ряда [3], который является мажорантой решения интегро-дифференциального уравнения, оценить погрешность $(m+1)$-го приближения любого из частных решений.

Инженерные теории и методы, подобные излагаемому здесь, не обесцениваются с примененням ЭВМ. На вычислительных машинах, в тех случаях, когда это требуется, могут производиться уточненные расчеты по проверке правильности выбора проектных параметров. Бесспорно, существует ряд задач, надежное решение которых в настоящее время нельзя мыслить без быстродействующей вычислительной техники, но аналитические (в том числе и инженерные) методы должны и впредь развиваться наряду с широким внедрением машинных методов расчета в строительную механику.

Цель статьи – построение методики решения линейных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, к которым сводятся многие физико-технические задачи.

Изложение основного материала. Изучение физических явлений средствами математического анализа во многих случаях приводит к линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, которое в общем случае можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n}\left[a_k+\varepsilon_k\cdot f_k(x)\right]\frac{d^k\varphi\psi}{dx^k}=f(x), \tag{1}$$

где $a_{k(k=0,1,2....n)}$ – постоянные, причем $a_n\neq 0$; ε_k – параметр уравнения; $f_k(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, ограниченные на всей вещественной оси действительного аргумента *x*; $\psi=\psi(x)$ – искомая функция.

На основе преобразования Лапласа [2] запишем выражения для функций $f(x)$ и $\psi(x)$:

$$f(p)=\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-\rho x}dx;\quad \psi(p)=\int_0^\infty \psi(x)\cdot e^{-\rho x}dx,$$

где $p=\sigma+i\rho$ – комплексная переменная.

Введем обозначение для начального значения искомой функции $\psi(x)$ и ее производных в точке $x=0$:

$$\psi^{(m)}(0)=\left.\frac{d^m\psi}{dx^m}\right|_{x=0}\quad (m=0,1,2,...,n-1).$$

Используя теорему дифференцирования оригинала [2]: $\int_0^\infty \frac{d^k\psi}{dx^k}\cdot e^{-\rho x}dx=p\psi(p)-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\psi^{(m)}(0)}{p^{m=1-k}}$, после несложных математических преобразований относительно изображения искомой функции приходим к следующему уравнению:

$$\psi(p)=F(p)-\sum_k Q(p)M_k(p),\tag{2}$$

где $F(p)=Q(p)\left[f(p)+\sum_{k=1}\sum_{m=0}\frac{a_k\psi^{(m)}(0)}{p^{m+1-k}}\right];$

$$M_k(p)=\varepsilon_k\int_0^\infty f_k(x)\frac{d^k\psi}{dx^k}\cdot e^{-\rho x}dx;\quad Q(p)=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k}.$$

Применив теорему умножения изображений [2], можно записать следующие равенства:

$$Q(p)\cdot M_k(p)=\int_0^\infty\left[\int_0^x Q(x,\xi)\cdot M_k(\xi)d\xi\right]\cdot e^{-\rho x}dx;\tag{3}$$

$$Q(p)\cdot f(p)=\int_0^\infty\left[\int_0^x Q(x,\xi)\cdot f(\xi)d\xi\right]\cdot e^{-\rho x}dx\,.\tag{4}$$

К левой и правой частям уравнения (2), с учетом выражений (3) и (4), применим интеграл Бромвича и в результате относительно искомой функции приходим к интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра:

$$\psi(x)=\psi_*(x)-\sum_k\int_0^x S_k(x,\xi)\frac{d^k\psi}{d\xi^k}d\xi,\tag{5}$$

где $\psi_*(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi_j(x)+\int_0^k Q(x,\xi)\cdot f(\xi)d\xi$ – общее решение уравнения (1) с постоянными коэффициентами, т.е. $\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^k\psi}{dx^k}=f(x)$; C_j – произвольные постоянные; ξ – действительное переменное; φ_j – система функций, удовлетворяющая решению соответствующего однородного дифференциального уравнения (1) с постоянными коэффициентами, т. е. $\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^k\psi}{dx^k}=0;$ $S_k(x,\xi)=\xi_k\cdot f_k\cdot(\xi)\cdot Q(x,\xi)$ – ядро уравнения (5), определяемое в области комплексного переменного с помощью интеграла Бромвича:

$$Q(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\cdot i}\lim\int_{\sigma-i\rho}^{\sigma+i\rho}\frac{e^{(x-\xi)\rho}}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k}dp. \tag{6}$$

Напомним, что интеграл (6), т. е. интеграл в области функции комплексного переменного, определяется с помощью теории вычетов [2].

Для однородной задачи уравнение Вольтерра (5) принимает вид:

$$\psi(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi_j(x)-\sum_k\int_0^x S_k(x,\xi)\frac{d^k\psi}{d\xi^k}d\xi. \tag{7}$$

Принимая за нулевое приближение выражение $\psi_0(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi_j(x)$, $(m+1)$-е приближение искомой функции можно построить с помощью рекуррентной формулы:

$$\psi_{m+1}(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi_j(x)-\sum_k\int_0^x S_k(x,\xi)\frac{d^k\psi_m}{d\xi^k}d\xi. \tag{8}$$

Присоединяя сюда решение от правой части, получаем выражение для $(m+1)$-го приближения неоднородной задачи:

$$\psi_{m+1}(x)=\psi_*(x)-\sum_k\int_0^x S_k(x,\xi)\frac{d^k\psi_m}{d\xi^k}d\xi. \tag{9}$$

Из теории интегральных уравнений [4] известно, что построенный таким способом процесс последовательных приближений асимптотически сходится к точному решению, причем скорость сходимости тем выше, чем меньше параметр ε_K .

Актуальными в прикладном отношении задачами строительной механики упругих систем с переменными геометрическими или жесткостными характеристиками являются задачи по отысканию критических нагрузок или частот собственных колебаний, т. е. задачи по отысканию собственных чисел.

Для таких задач первое приближение искомой функции в соответствии с формулой (8) можно представить в такой же форме, как и для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\psi_1(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi_{*j}(x), \tag{10}$$

где $\varphi_{*j}\left(x\right)=\varphi_j\left(x\right)-\sum\limits_k\int\limits_0^x S_k\left(x,\xi\right)\dfrac{d^k\varphi_j}{d\xi^k}d\xi.$

Присоединяя граничные условия $\psi^k\left(0\right)=0$ и $\psi^k\left(l\right)=0$, получим относительно C_j систему однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi^{\kappa}{}_{*j}\left(0\right)=0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n}C_j\cdot\varphi^{\kappa}{}_{*j}\left(l\right)=0. \tag{11}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, приходим к трансцендентному уравнению:

$$\sum_{m=1}^{n}Q_m\left(\lambda,l,\varepsilon\right)\cdot\mathrm{ch}\left[\left(\lambda,l\right)_m+\beta_m\left(\lambda,l,\varepsilon\right)\right]=0, \tag{12}$$

где $Q_m\left(\lambda,l,\varepsilon\right)=\sqrt{b_m^2\left(\lambda,l,\varepsilon\right)-a_m^2\left(\lambda,l,\varepsilon\right)};\quad \beta_m\left(\lambda,l,\varepsilon\right)=\mathrm{arth}\dfrac{a_m^2\left(\lambda,l,\varepsilon\right)}{b_m^2\left(\lambda,l,\varepsilon\right)}.$

Корни уравнения и определяют искомые собственные числа.

Выводы

1. Анализируя формулу (9), можно показать, что $\left(m+1\right)$-е приближение искомой функции будет пропорционально выражению $\dfrac{\varepsilon_k^{m+1}}{\left(m+1\right)!}$.

2. Решение уравнений типа Вольтерра методом последовательных приближений удобно строить с помощью достаточно простых компьютерных программ.

3. В последующих публикациях по изложенной методике будут приведены примеры отыскания собственных чисел для замкнутых оболочек вращения с вырожденными полюсами и изменяющимися жесткостными и геометрическими параметрами.

Список использованных источников

1. Кан, С. Н. Строительная механика оболочек [Текст] : монография / С. Н. Кан. – М. : Машиностроение, 1966. – 508 с.

2.Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] : монография // В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Физматгиз, 1961. – 356 с.

3. Соболев, С. А. Уравнения математической физики [Текст] : монография // С. А. Соболев. – М. : ГИТТЛ, 1954. – 372 с.

4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] : учебник // В. И. Смирнов. – М. : Физматгиз. – 1958. – Т. IV. – 536 с.

Стаття надійшла до редакції 21.05.2014 р.