УДК 378.14 (47) (09)

І. І. Сидоренко

ЙМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Розглянуто можливість використання математичної моделі відомого фізичного явища для ефективного засвоєння формальних теорій.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій. Як показує практика викладання математики на нематематичних факультетах, найбільші труднощі викликає засвоєння базових предметів, таких як вища математика та фізика. Також відомо, що однією з необхідних умов успішного навчання є пізнавальна активність, важливим чинником якої є пізнавальний інтерес людини, що навчається [1]. Збудження інтересу до дисциплін математичного циклу можна здійснювати за рахунок міжпредметних зв'язків з професійними дисциплінами [2, 3, 4]. Проте пізнавальну активність можна підвищити не тільки за рахунок професійної спрямованості викладання формальних базових теорій, але й використовуючи зв'язок між фундаментальними дисциплінами.

Мета статті. На прикладі побудови математичної моделі броунівського руху із застосуванням апарату теорії ймовірностей, показати можливість ефективного використання знань у рамках фундаментальних дисциплін.

Виклад основного матеріалу. Як відомо, молекули, з яких складається рідина чи газ, перебувають у безперервному хаотичному русі, що спричиняє дифузію і броунівський рух. Броунівський рух полягає у безладному неперервному русі дрібної частинки, що завислa у рідині чи газі. Він обумовлений поштовхами навколишніх молекул, імпульси яких не зрівноважені. Напрямок руху частинки є випадковим. З огляду на це, можливо обчислити ймовірність, з якою частинка переміститься в те чи інше положення. Спочатку зробимо три припущення. По-перше, за рахунок того, що броунівський рух має властивість ізотропності та однорідності, розглядатимемо задачу на прямій, а не в просторі. Також припустимо, що положення частинки спостерігається в моменти часу t, кратні певному моменту часу τ, ($\tau \ll t$), тобто в моменти $t = n\,\tau$, де $n = 0, 1, 2 \ldots n$, τ – це час, який витрачає частинка на один акт переміщення. Для спрощення оберемо τ за одиницю. Тоді наші спостереження за частинкою відбуватимуться в момент $t = 0, 1, 2, \ldots$. Останнім припущенням оберемо те, що спостереження вимірюватимуться з точністю до h $(h \to 0)$, тому положення частинки на прямій відповідатиме значенням координати $x = 0, \pm h, \pm 2h, \pm 3h, \ldots, \pm mh$, і за одиницю часу частинка може перейти з кожної точки лише у два сусідніх положення на прямій, чим забезпечуємо неперервність руху. Окремо зауважимо, якщо обрати h за одиницю довжини, частинка перейде з положення k в положення $k+1$ або в $k-1$. Рух, який ми дістанемо за таких умов можна вважати випадковим блуканням [5, 6]. Позначимо через A подію, що полягає в тому, що частинка перейшла за одиницю часу на 1 крок праворуч, а через B – на 1 крок ліворуч. З властивості ізотропності випливає, що ймовірність кожної з цих подій однакова і $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

З властивості однорідності випливає, що події $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, де A_t – певна подія, що відбувалася в момент часу t, незалежні між собою, тому

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Нехай частинка в початковий момент була в точці 0. За час $t = 2$ вона може дістатися в одну з точок на відстані: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. Якщо $A0$ – подія, яка полягає у тому, що в перший момент частинка зробила крок праворуч, $B0$ – крок ліворуч, а $A1$ і $B1$ – відповідні події для моменту $t = 1$, то подія в момент $t = 2$ – частинка потрапила у точку 0 запишеться так: $A_0B_1 + A_1B_0$. Ймовірність цієї події така:

$$P(A_0B_1 + A_1B_0) = P(A_0B_1) + P(A_1B_0) =$$
$$= P(A_0)P(B_1) + P(A_1)P(B_0) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для того, щоб частинка дісталася у точку –2 або 2, частинка має зробити два послідовних кроки ліворуч або праворуч відповідно. Ймовірність таких подій

$$P(A_0 \cdot A_1) = P(B_0 \cdot B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Обчислимо ймовірність $P_n(m)$ того, що частинка через час $t = n$ потрапить у точку m, якщо вона у початковий момент була у точці $x=0$. При цьому n і m повинні мати однакову парність, тобто $n - m$ є парним числом. Якщо за n кроків частинка потрапила у точку m і зробила при цьому x додатних та y від'ємних кроків, то

$$x + y = n,\ x - y = m,\ x = \frac{n+m}{2},\ y = \frac{n-m}{2}.$$

Ймовірність одного певного шляху буде $\frac{1}{2^n}$. Щоб знайти ймовірність $P_n(m)$ потрапляння у точку m, треба підрахувати кількість шляхів, в яких x додатних та y від'ємних кроків. Події, що відповідають різним шляхам, несумісні між собою, тому ймовірність потрапити у точку m буде добутком числа шляхів, що закінчуються у точці m на $\frac{1}{2^n}$. Кожний шлях визначиться, якщо позначити ті моменти, де частинка робить крок праворуч (у інші моменти вона робить крок ліворуч). Тому число шляхів – це число комбінацій $C_n^{\frac{n+m}{2}}$. Тоді

$$P_n(m) = \frac{1}{2_n} C_n^{\frac{n+m}{2}} = \frac{n!}{2^n (\frac{n+m}{2})!(\frac{n-m}{2})!}. \tag{1}$$

Оскільки $\tau << t$, то число n у рівності $t = n\ \tau\ (t \neq 0)$ досить велике: $n \to \infty$. За таких умов $(n+m) \to \infty, (n-m) \to \infty$ Використавши у правій частині рівності (1) формулу Стірлінга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

матимемо:

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{2^n \sqrt{\pi^2 \left(\frac{n^2 - m^2}{4}\right)} \left(\frac{n+m}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} \left(\frac{n-m}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n+m}{2}}} \frac{1}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\frac{n-m}{2}}}. \tag{2}$$

Зауважимо, що за рахунок необмеженості параметра n та обмеженості числа m у рівності (2) відношення $\frac{m}{n}$ та $\frac{m^2}{n^2}$ є нескінченно малими величинами:

$$\frac{m}{n} \to 0,\ \frac{m^2}{n^2} \to 0. \tag{3}$$

Використовуючи надалі у формулі (2) властивість (3) та другу визначну границю

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \sim e^x,$$

маємо: $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n+m}{2}}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\frac{n-m}{2}}=\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n-m}{2}}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{m}\sim e^{\frac{m^2}{2n}\left(1+\frac{m}{n}\right)}$ і $\sqrt{1-\frac{m^2}{n^2}}\sim 1$.

Таким чином,

$$P_n(m)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{m^2}{2n}}. \tag{4}$$

Тоді ймовірність того, що частинка у момент часу $t=n\tau$ потрапить у точку $x=mh$, за формулою (4) дорівнює:

$$P_n(m)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{t}{\tau}}}e^{-\frac{\frac{x^2}{h^2}}{2\frac{t}{\tau}}}.$$

Поклавши $\frac{h^2}{\tau}=D$, отримаємо

$$P_t(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi tD}}e^{-\frac{x^2}{2tD}}.$$

Нагадаємо, що у фізиці параметр *D* називається коефіцієнтом дифузії.

Висновки

Як можна побачити, у даній моделі використовуються лише знання, передбачені навчальними програмами загальноосвітніх фундаментальних курсів для вищих навчальних закладів. Даний розгляд показує, яким чином можна застосовувати взаємопідтримку фундаментальних дисциплін для полегшення розуміння формальних відомостей вищої математики.

Список використаних джерел

1. Лозова В. І Теоретичні основи виховання і навчання: навч. посібн / В. І. Лозова, Г. В. Троцко. – Х. : Ранок, 2002. – 398 с.

2. Максименко И. Г. Изучение педагогических факторов, детерминирующих учебную успешность студентов // Педагогіка і психологія, формування творчої особистості: проблеми і пошуки / И. Г. Максименко // Зб. наук. пр. – Київ-Запоріжжя: Запорізький інститут післядипломної освіти, 2003. – Вип. 27. – С. 138 – 144.

3. Поддубный К. И. О преподавании дисциплин математического цикла для студентов специальности “экономическая кибернетика” / К. И. Поддубный, В. Н. Трыкин : Матеріали регіональної науково-методичної конференції “Формування стратегії конкурентоспроможності освіти в регіоні” (жовт. 2004) / відп. ред. І. Л. Сазонець. – Дніпропетровськ : Дніпропетровський національний університет, 2004. – С. 121 – 124.

4. Толкачов А. М. Загальна фізика. Модуль 1. Механіка. Модуль 2. Молекулярна фізика і термодинаміка: посіб. для самостійної роботи студентів / А. М. Толкачов, О. В. Третьяков. – Х. : Академія ВВ МВС України, 2007. – 165 с.

5. Мостселлер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостселлер. – М. : Наука, 1971. – 103 с.

6. Гихман И. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1998. – 439 с.

Стаття надійшла до редакції 04.11.2009 р.