

УДК 624.07

В. М. Беспалов, Г. М. Маренко, Р. О. Кайдалов

ФОРМУВАННЯ ПЕТЛІ МЕХАНІЧНОГО ГІСТЕРЕЗИСУ

Розглянуто питання формування петлі гістерезису в системах із лінійно залежними від величини деформації значеннями рівнів жорсткого ковзання. Показано необхідність роздільного визначення пружних і дисипативних характеристик таких систем. Проведено дослідження коефіцієнта поглинання енергії коливань.

Постановка проблеми. Гістерезис у перекладі з грецької означає запізнення, тобто різні реакції фізичного тіла на зовнішні діяння залежно від того, піддавалося це тіло раніше таким діянням, чи піддається їм уперше. Гістерезис можна пояснити незворотними змінами, що проявляються під час прямих та зворотних процесів. Залежно від суті фізичних процесів прийнято розрізнявати магнітний, діелектричний та пружний гістерезис.

Під пружним гістерезисом розуміють різницю в значенні деформації тіла при одному й тому ж значенні механічного напруження залежно від значення попередньої деформації тіла. Пружний гістерезис є причиною згасання вільних коливань у твердих тілах і поглинання енергії у випадку вимушених коливань. Одразу зауважимо, що поглинання енергії при коливаннях твердих тіл пов'язане із внутрішнім тертям та пружно-пластичними деформаціями, тобто не зовсім пружними процесами, в той час як для більшості твердих тіл існують поняття пружних характеристик, модуля пружності, пружного прогину та ін. Ось чому більш правильно вживати термін “механічний гістерезис”.

Механічний гістерезис може бути шкідливим, з яким необхідно боротися (вузли тертя машин), або корисним, таким що використовується свідомо (системи демпфірування коливань). У такі конструкції паралельно включають пружні елементи (ресора, пружина) та елементи, що мають значний механічний гістерезис (амортизатор). У зазначених системах існує, так званий, конструктивний гістерезис, основні характеристики якого пов'язані вже не тільки із внутрішнім тертям, а із зовнішнім, нерідко – із внутрішнім тертям у рідині. До основних питань конструювання систем із механічним гістерезисом слід віднести свідоме визначення співвідношення пружних та дисипативних характеристик елементів ще на етапі вибору конструктивних схем. Наприклад, неправильне визначення пружних та дисипативних характеристик каротажних кабелів призвело до похибок в оцінюванні результатів дослідження Кольської надглибокої свердловини (проектна глибина 15 км).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням урахування сил тертя при деформуванні пружних систем присвячені роботи [1], [2], які стали вже класичними. Однак у цих роботах наведено результати великої кількості досліджень урахування сил тертя при коливаннях, при цьому величина сили тертя може набувати два значення: дорівнювати нулю або межовому значенню сили тертя спокою.

У роботі [3] Ю. П. Бусаров запропонував модель сухого тертя із плавною зміною сили тертя від нуля до межового значення, що відповідає жорсткому ковзанню.

У роботі [4] показано, що для описування гістерезисних характеристик систем із конструктивним гістерезисом, зокрема канатів і каротажних кабелів, математична модель сухого тертя, запропонована Ю. П. Бусаровим, непридатна.

Крім того, у дослідженні коливань велике значення має визначення коефіцієнта поглинання та декременту коливань. У сучасних дослідженнях пружні характеристики визначають, наприклад, методом скінченних елементів, а дисипативними характеристиками часто нехтують. Однак результати дослідів показують, що системи із конструктивним гістерезисом не завжди можуть бути представлені як пружно-в'язкі тіла. Такі самі за формою віброграми отримуємо у випадку амплітудно-залежного гістерезисного тертя, коли в'язке тертя взагалі відсутнє. До того ж виявляється, що дослідження формування гілок гістерезисної петлі впливає на величини коефіцієнта поглинання та декременту коливань; часто їх визначають неправильно.

Метою статті є дослідження пружних та дисипативних характеристик систем із конструктивним

гістерезисом за умови лінійної зміни межового значення величини сили тертя.

Виклад основного матеріалу. Гілки довільного гістерезисного циклу можна зобразити сімействами кривих навантаження ($\dot{z} > 0$) та розвантаження ($\dot{z} < 0$). Перехід з рівня жорсткого ковзання $-T_0$ на $+T_0$ та назад відбувається плавно у межах зони попереднього зміщення $z_{пз}$ (рис. 1 а). Наявність плавного переходу від пружного ковзання до жорсткого відмічається багатьма авторами.

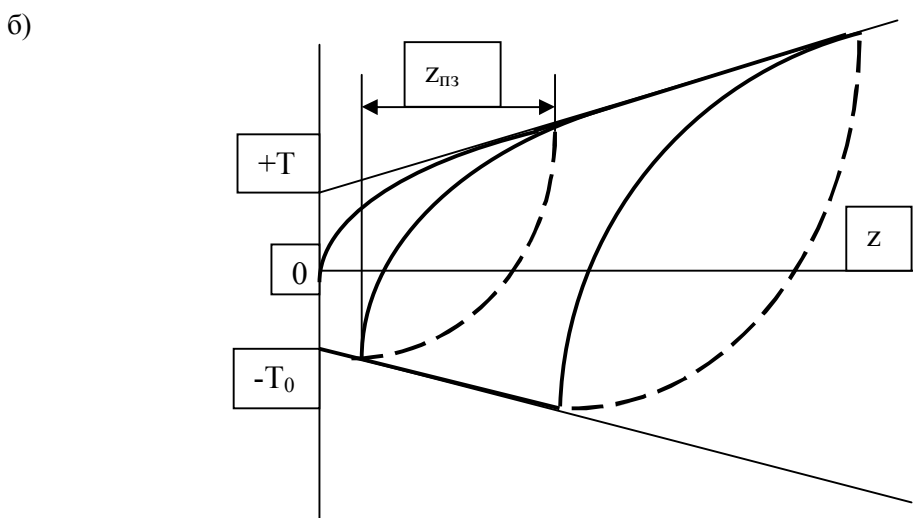
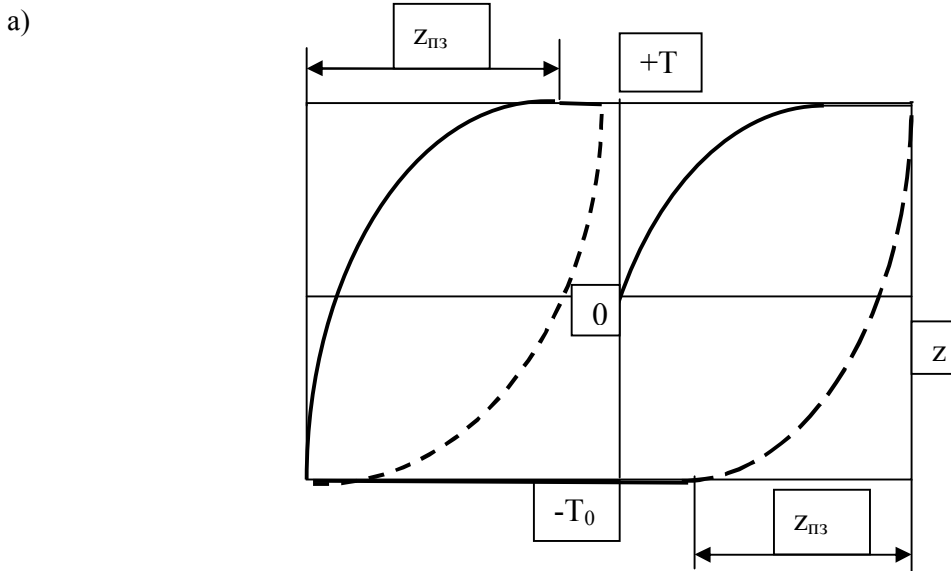


Рис. 1. Залежність сил тертя від попереднього зміщення

Залежність сил тертя T від попереднього зміщення z добре описують інтегральні функції

$$\begin{cases} T = T_0 \cdot \{1 - \exp[-b(z - c_1)]\}, \dot{z} > 0; \\ T = -T_0 \cdot \{1 - \exp[b(z - c_2)]\}, \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ці інтегральні функції є рішенням системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dT/dz = b(T_0 - T), \dot{z} > 0; \\ dT/dz = b(T_0 + T), \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут c_1 та c_2 – константи, що враховують переміщення кривої по горизонталі; b – показник експоненти. Така модель відповідає принципу Релея–Мазінга, необхідною умовою для цього є постійність межового значення сили тертя в процесі навантаження [3].

У загальному випадку опір системи зовнішньому діянню визначатиметься сумарним опором пружного елемента $S = m \cdot z$ і непружного елемента $T_0 + k \cdot z$, тобто (див. рис.1 б) $T = S \pm (T_0 + k \cdot z)$, де m – коефіцієнт жорсткості пружного елемента, k – коефіцієнт збільшення межового значення сили тертя залежно від деформації z . У такому разі математична модель матиме вигляд:

$$\begin{cases} T = m \cdot z + T_0 \{1 + k \cdot z - \exp[-b(z - c_1)]\}, \dot{z} > 0; \\ T = m \cdot z - T_0 \cdot \{1 + k \cdot z - \exp[b(z - c_2)]\}, \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Якщо ввести позначення $M = m / T_0$ та $T / T_0 = \eta$, гілки навантаження η_H і розвантаження η_P будуть представлені у відносних величинах (замість постійних c_1 та c_2 введені характеристики a_H та a_P):

$$\begin{cases} \eta_H = (M + k)z + 1 - a_H \cdot \exp(-\beta z); \\ \eta_P = (M - k)z - 1 + a_P \cdot \exp(\beta z). \end{cases} \quad (4)$$

Значення характеристик a_H та a_P можна знайти із умови, що в точках зміни напрямків деформації z_H та z_P ординати гілок навантаження та розвантаження рівні між собою, тобто $\eta_H(z_H) = \eta_P(z_H)$ та $\eta_H(z_P) = \eta_P(z_P)$. З цієї умови:

$$\begin{cases} a_H = [2(1 + k \cdot z_P) - a'_P \cdot \exp(\beta z_P)] \cdot \exp(\beta z_P); \\ a_P = [2(1 + k \cdot z_H) - a'_H \cdot \exp(-\beta z_H)] \cdot \exp(-\beta z_H), \end{cases} \quad (5)$$

де a'_H та a'_P – значення характеристик для гілок, попередніх тим, що розглядаються (див. рис. 2). У разі навантаження від точки $z = 0$, $a_H = 1$.

Якщо “історія навантаження” конструкції невідома, а деформаційний стан її визначається значенням z^* , то за відомих параметрів системи

$$p(t) \begin{cases} a_H = [kz^* - z^* (k - m) / T_0] \cdot \exp(\beta z^*); \\ a_P = [kz^* + 2 + z^* (k - m) / T_0] \cdot \exp(\beta z^*), \end{cases} \quad (6)$$

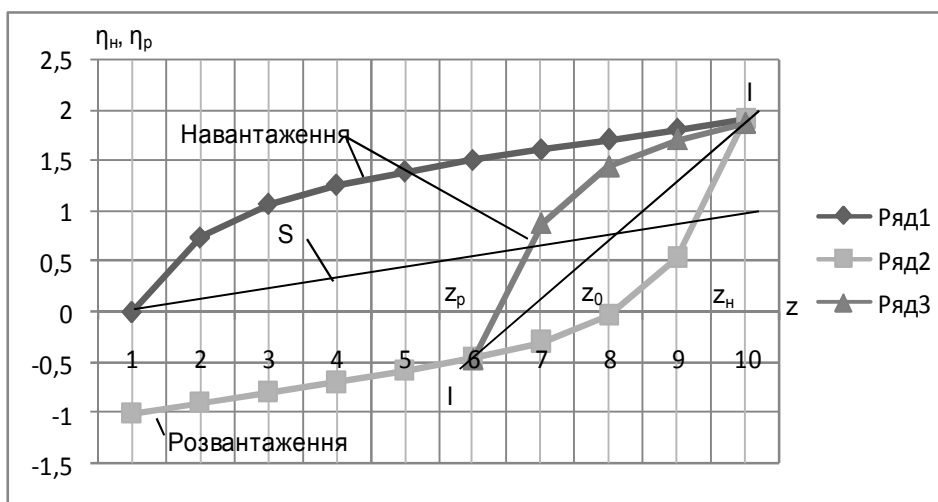


Рис. 2. Побудова петлі гістерезису

із рис. 2 видно, що завантаження такої конструктивної системи (ряд 1) та її розвантаження (ряд 2) зображено різними гілками внаслідок дисипації енергії в непружному елементі (амортизаторі). Пружні деформації $S = m \cdot z$ лінійно пружних матеріалів описує закон прямої лінії. Якщо розвантаження здійснити не повністю, скажімо до точки 6, і знов перейти до навантаження (ряд 3), то отримаємо петлю гістерезису. Вона умовно показана замкненою, хоча зрозуміло, що дисипація

енергії відбувається у кожному циклі коливань, тому для реальної системи замість петлі отримаємо спіраль.

Як бачимо, лінія пружних деформацій перетинає петлю несиметрично; часто за лінію пружних деформацій помилково приймають лінію I-I, що призводить до невірних розрахунків.

Інтенсивність згасання коливань визначається коефіцієнтом поглинання Ψ , величина якого характеризує частку поглинутої енергії за цикл деформації відносно роботи пружних сил. Кількість поглинутої енергії визначається площею петлі гістерезису. Для віртуальної замкненої петлі:

$$\begin{cases} a_{\text{HЗ}} = \exp(\beta z_0) \cdot [(1+k \cdot z_0) / \text{ch}(\beta A) - k \cdot A / \text{sh}(\beta A)]; \\ a_{\text{PЗ}} = \exp(-\beta z_0) \cdot [(1+k \cdot z_0) / \text{ch}(\beta A) + k \cdot A / \text{sh}(\beta A)], \end{cases} \quad (7)$$

де $z_0 = (z_{\text{н}} + z_{\text{р}})/2$, $A = (z_{\text{р}} - z_{\text{н}})/2$.

Інтегрування різниці ординат гілок замкненої петлі в межах від $z = z_0 - A$ до $z = z_0 + A$ дає площу петлі:

$$V = \int_{z_0-A}^{z_0+A} (\eta_{\text{н}} - \eta_{\text{р}}) dz = 4(1+k \cdot z_0)[A - \text{th}(\beta A) / \beta]. \quad (8)$$

Інтегрування функції пружних деформацій Sdz у тих самих межах дає значення потенційної енергії пружних деформацій, яка чисельно дорівнює роботі пружних сил за цикл: $w = 2Mz_0A$.

За визначенням коефіцієнт поглинання

$$\psi_0 = V / w = 2(1+k \cdot z_0)[1 - \text{th}(\beta A) / \beta A] / (Mz_0). \quad (9)$$

Для систем із постійним значенням межового непружного опору в наведених формулах слід прийняти $k = 0$.

У триботехніці, наскільки нам відомо, не розглядають випадки лінійно залежного від деформації межового значення T_0 , тобто приймають $T = S \pm T_0$. Петля у цьому випадку має форму паралелограма, площа якого $V^* = 4 A m/M$. При цьому легко знайти коефіцієнт поглинання:

$$\psi_0^* = V^* / w = 2m / M^2 z_0. \quad (10)$$

Також нескладно визначити величину похибки γ :

$$\gamma = (\psi_0 - \psi_0^*) / \psi_0 = 1 - T_0 / ((1+mz_0)[1 - \text{th}(\beta A) / \beta A]). \quad (11)$$

За результатами аналізу: при $z_0 \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \gamma^* = 1 - T_0 / [1 - \text{th}(\beta A) / \beta A]$; при $z_0 \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$. Таким чином, значення коефіцієнта поглинання і декременту коливань можна переоцінити майже у два рази у бік збільшення. Свого часу при дослідженні Кольської надглибокої свердловини на глибині 13 км амплітуда коливань кінця каротажного кабеля із приладом перевищила 100 м, тоді як за попередніми розрахунками вона мала бути суттєво меншою.

Наведені дані можуть бути використані під час проектування різних систем із конструктивним гістерезисом, наприклад, підвіски автомобіля, поліспаств монтажних кранів, шахтного підйому та ін.

Результати, які становлять певний інтерес, можна отримати для випадку двовісного навантаження, наприклад розтягування та згину, що може бути темою іншого дослідження.

Висновки

Коефіцієнт поглинання (9) залежить від:

- амплітуди коливань A ;
- швидкості зростання непружного опору (параметр β);
- співвідношення жорсткості пружного елемента і межового непружного опору (параметр M);
- величини попередньої деформації пружного елемента z_0 .

Величина Ψ_0 швидко зменшується в області малих амплітуд A . Ось чому затухання відбувається більш інтенсивно у випадку більших зовнішніх діянь на систему. Згадайте: інтенсивність звуку струни музичного інструмента швидко зменшується, після чого із низькою інтенсивністю вона ще

довго звучить. Аналіз показує, що при $z_0 \rightarrow 0$, $\Psi_0 \rightarrow 0$, а при $z_0 \rightarrow \infty$, $\Psi_0 \rightarrow 2k/M$.

Зауважимо також, що традиційно уживана назва “логарифмічний декремент затухання” неправильна, тому що декремент затухання δ (декремент коливань) і є натуральним логарифмом відношення двох сусідніх амплітуд в один і той же бік. За наявності сухого тертя $\Psi_0 = 2\delta$.

Отже, силові характеристики пружного (k , S_{\max}) та дисипативного (β , T_0) елементів конструкції слід визначати окремо. При експериментальному визначенні характеристик необхідно використовувати методику обробки експериментальних даних, наведену в [4].

Список використаних джерел

1. Пановко Я. Г. Внутренне трение при колебаниях упругих систем / Я. Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 380 с.
2. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала / Г. С. Писаренко. – К. : Наук. думка, 1970. – 239 с.
3. Бусаров Ю. П. Математическая модель гистерезиса внешнего трения / Ю. П. Бусаров, М. С. Островский // Машиностроение. – 1976. – № 5. – С. 51 – 82.
4. Гистерезис при статическом растяжении каротажных канатов / В. Н. Беспалов, Б. С. Ковальский, С. Л. Смоляков, Ю. И. Карпучин // Механика технологического оборудования: метод. пособие; под ред. В. А. Прокопова. – МО СССР, 1989. – Ч. 1. – С. 57 – 72.

Стаття надійшла до редакції 15.11.2010 р.