УДК 62-50:681.3

О. О. Морозов

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ СПІВРОБІТНИКІВ ОБСЛУГОВУЮЧОГО ЦЕНТРУ

Розглядається задача визначення оптимальної кількості співробітників обслуговуючого центру з метою мінімізації сумарних витрат у вигляді штрафів за затримку початку процесу обслуговування заявок і виплати заробітної плати співробітників. Задача вирішується для визначених обмежень та припущень.

Постановка проблеми. Організація ефективної роботи будь-якого обслуговуючого центру з надання певних послуг за разовими заявками, зокрема з обслуговування технічних засобів, вимагає виконання комплексу завдань. Одним з таких завдань є визначення необхідної кількості співробітників центру. Вона повинна забезпечувати обслуговування заявок, що надходять, та бути не обтяжливою для фонду заробітної плати. Організація обслуговування заявок повинна забезпечувати ритмічність робіт та, як наслідок, мінімізувати штрафи за затримку початку процесу обслуговування заявок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Завданням організації обслуговування або надання будь-яких послуг присвячено багато публікацій. Системи, які створюються для цього, представляються як системи масового обслуговування (СМО). Формулювання, формалізація та подальше вирішення задач обґрунтування параметрів СМО залежать від вихідних припущень, обмежень та кінцевої мети функціонування системи. Такі задачі переважно представляються як оптимізаційні, їх варіативність визначається вибраними показниками оптимальності. Найбільш повними можна вважати задачі, які вирішуються з техніко-економічних позицій.

Мета статті – сформувати формалізовану задачу оптимізації кількості співробітників обслуговуючого центру, що дозволило б мінімізувати сумарні витрати у вигляді штрафів за затримку початку процесу обслуговування заявок та заробітної плати і запропонувати алгоритм її вирішення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо процес функціонування обслуговуючого центру, який займається разовими заявками. Припустимо, що заявки на обслуговування надходять через випадкові проміжки часу. Середнє значення інтервалу часу між надходженнями окремих заявок становить $1/\lambda$, а середня інтенсивність потоку в одиницю часу λ.

Припустимо, що вхідний потік заявок на обслуговування задовольняє вимогам стаціонарності, незалежності від передісторії процесу (відсутність післядії) і ординарності потоку (ймовірність того, що в інтервалі часу dt надійде більше однієї заявки, є величина нескінченно мала в порівнянні з dt). Такий потік називається найпростішим, а інтервал часу між подіями – надходженнями послідовних заявок на обслуговування, є випадковою величиною, розподіленою за показовим законом із щільністю розподілу $p(t)=\lambda \cdot e^{-\lambda t},\ t \geq 0$, що характеризує кількість заявок на обслуговування, які надходять в одиницю часу [1].

Продовжимо змістовний опис задачі. У обслуговуючому центрі працює деяка кількість фахівців, що займаються обслуговуванням технічних засобів. Робота кожного з них може бути схарактеризована середнім часом обслуговування $1/\mu$. Інтенсивність обслуговування (середня кількість заявок, що обслуговують в одиницю часу) дорівнює μ.

Будемо виходити з того, що час обслуговування заявки фахівцем також є випадковою величиною і має показовий розподіл із щільністю $p(t)=\mu \cdot e^{-\mu t},\ t \geq 0$.

Припустимо, що число працюючих у центрі фахівців дорівнює n. Якщо в момент надходження заявки на обслуговування усі фахівці вже зайняті обслуговуванням заявок, що надійшли раніше, то її ставлять у чергу. Довжина черги не обмежена.

Така система називається n-канальною СМО з очікуванням [2]. Відомо [2], що якщо виконується співвідношення $\chi = \lambda / \mu \cdot n < 1$, то існує стаціонарний режим функціонування такої СМО з кінцевою довжиною черги на обслуговування. Якщо $\chi \geq 1$, то черга буде необмежено зростати [3].

Отже, можна стверджувати, що число фахівців обслуговуючого центру n повинно бути більше ніж λ / μ.

Слід зазначити, що час реагування на заявку не повинен перевищувати $t_{реаг}$, інакше сплачується замовникові штраф у розмірі s за кожну одиницю часу після закінчення $t_{реаг}$ до початку обслуговування заявки фахівцями центру.

Для такої СМО, за умови, що відомі λ, μ та n, можна визначити середній час знаходження заявки в черзі [3, 4]:

$$t_{оч} = \frac{\rho^n \cdot p_0}{n \cdot \mu \cdot n!(1-\chi)^2},$$

де $\rho = \lambda / \mu$, $\chi = \rho / n$, $p_0 = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^{n-1}}{n!(n-\rho)}\right)}$.

У випадку, якщо $t_{оч} > t_{реаг}$, за кожну одиницю часу в середньому сплачується штраф у розмірі $\lambda \cdot \left(t_{оч} - t_{реаг}\right) \cdot s$, де λ – середня кількість заявок на обслуговування, що надходять за одиницю часу.

Середня заробітна плата кожного фахівця обслуговуючого центру складає z грошових одиниць за одиницю часу. Оскільки число фахівців n, то загальна сума, що їм виплачується в одиницю часу, складає $n \cdot z$.

Сформулюємо завдання визначення оптимальної кількості фахівців обслуговуючого центру n^{opt}, що мінімізує сумарні витрати у вигляді штрафів за затримку початку процесу обслуговування заявок і заробітної плати співробітників цього центру: $n^{opt} = arg\,min\,F(n)$, $F(n) = \lambda \cdot \left(t_{оч}(n) - t_{реаг}\right) \cdot s + (n \cdot z)$, де $n \in M \subset N$, $n_1 < n < n_2$ і $t_{реаг}$ = const; n_1 і n_2 – відповідно нижня і верхня границі множини M:

$$n_1: \; max\, n \in N: \; \chi = \frac{\lambda}{\mu \cdot n} \geq 1, \tag{1}$$

$$n_2: \; min\, n \in N: \; t_{оч}(n) < t_{реаг}; \; n_1, n_2 \notin M. \tag{2}$$

n_1 – максимальне з усіх $n \in N$, за яких черга на обслуговування необмежено зростає; n_2 – мінімальне з усіх $n \in N$, за яких час очікування заявки менше, ніж встановлений час реакції.

Сформульовану задачу вирішуватимемо методом перебору по $n \in M$ за умови заданих значень λ, μ, s і z. Значення n_1 визначимо з нерівності у виразі (1). Значення n_2 визначимо шляхом послідовного збільшення n від $(n_1 + 1)$ до того значення, за якого вперше виконається нерівність у виразі (2), це і буде n_2.

Задачу вирішуватимемо для значень параметрів $\lambda = 5$, $\mu = 1$, $z = 1$ і значень параметра s, що послідовно дорівнюють 4z, z, 0.25z. При цьому $\rho = \lambda / \mu = 5$. На підставі нерівності з (1) і умови $n_1 \in N$ маємо $n_1 = 5$, звідки необхідно $n \geq 6$. За одиницю виміру часу для розрахунку величини $F(n)$ візьмемо 1 місяць. Величина $t_{реаг} = 4$ год $\approx$ 0.0056 міс. Вважатимемо, що у місяці 30 днів, це відповідає реальному часу реакції у процесі обслуговування заявок на ремонт технічних засобів.

Результати розв'язування задачі наведено в табл. 1 і 2.

Таблиця 1

Результати обчислення параметрів обслуговування

n	6	7	8	9	10	11
p_o	0,0045	0,0060	0,0065	0,0066	0,0067	0,0067
$t_{оч}$, міс.	0,5859	0,1628	0,0560	0,0200	0,0072	0,0025
$t_{оч}$, доба	17,577	4,884	1,68	0,6	0,216	0,075
$t_{оч}$, год	421,848	117,216	40,32	14,4	5,184	1,8

Таблиця 2

Результати обчислення значень штрафу $F(n)$

s \ n	6	7	8	9	10	
4	17,606	10,144	9,008	9,288	10,032	$n^{opt} = 8$
1	8,902	7,786	8,252	9,072	10,008	$n^{opt} = 7$
0,25	6,725	7,197	8,063	9,018	10,002	$n^{opt} = 6$

З табл. 1 видно, що $t_{оч}(n = 11) = 1{,}8$ год < $t_{реаг} = 4$ год, звідки необхідно, щоб $n_2 = 11$ і $M = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. З табл. 2 видно, що для наведених значень λ, μ, z і значень s, рівних 4, 1, 0.25, одержуємо значення n^{opt}, які відповідно дорівнюють 8, 7 і 6. Це і будуть оптимальні шукані значення кількості фахівців.

Рішення задачі може бути проілюстроване графічно. По осі абсцис (рис. 1) відкладена величина n, а по осі ординат час $t_{оч}(n)$, заданий для більшої наочності в днях. Величини сумарної місячної

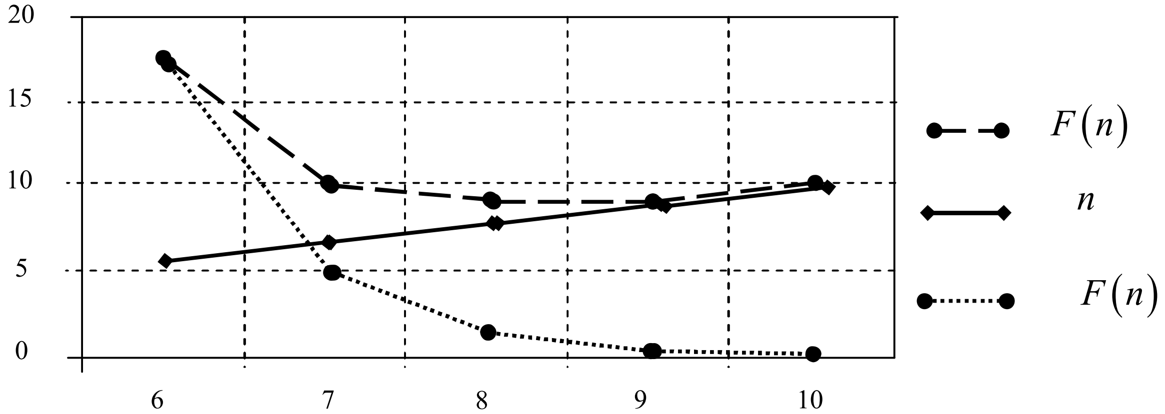

Рис. 1. Графічне представлення рішення задачі

зарплати $(n \cdot z)$ і $F(n)$ отримані за умови, що $s = 4$ та $z = 4$.

Для наочності, хоча задача вирішувалася тільки для цілих n, сусідні в сенсі ординати значення, наприклад $t_{оч}(n)$ і $t_{оч}(n+1)$, з'єднані відрізками прямих.

На основі отриманих результатів можна зробити такий практичний висновок. У випадку, якщо величина штрафу s відносно мала порівняно із середньою зарплатою фахівця s (для нашого прикладу $s = 0.25$) за той самий період часу і відомі середня інтенсивність потоку заявок λ та середня продуктивність праці фахівця з їх обслуговування μ, немає необхідності проводити достатньо громіздкі розрахунки з визначення n^{opt}. Як оптимальну величину кількості фахівців можна прийняти $(n_1 + 1)$. Тобто у такому випадку оптимальною вважатиметься мінімальна кількість фахівців, за якої вже забезпечується обмеженість черги на обслуговування. Для розглянутої задачі $n^{opt}(s = 0.25) = n_1 + 1 = 6$.

Висновки

Отже, запропоновані формалізований опис та алгоритм вирішення задачі оптимізації кількості співробітників обслуговуючого центру, яка забезпечує мінімізацію сумарних витрат у вигляді штрафів за затримку початку обслуговування заявок і виплати заробітної плати. На підставі проведених розрахунків із використанням зазначеного алгоритму зроблені практичні рекомендації щодо вирішення задачі з оптимізації кількості співробітників такого центру.

Список використаних джерел

1. Зайченко Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища шк., 1975. – 320 с.

2. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.

3. Вентцель Е. С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Радио и связь, 1983. – 416 с.

4. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учеб. / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

Стаття надійшла до редакції 28.04.2010 р.