УДК 519.1

В. М. Бацамут

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ВІДНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ ЗРУЙНОВАНОЇ МЕРЕЖІ ЗВ'ЯЗКУ НА ОСНОВІ СИНТЕЗУ МІНІМАЛЬНОГО ПОКРИВНОГО ДЕРЕВА ДОВІЛЬНОЇ ГРУПИ ВЕРШИН ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА

Розглянуто метод побудови на довільній множині вершин початкового однокомпонентного графа мінімального покривного дерева, що дозволяє мінімізувати витрати відновлювальних робіт на зруйнованому мережевому об'єкті.

Постановка проблеми. Опорною мережею дальнього (телефонного) зв'язку внутрішніх військ МВС України є мережа зв'язку державного підприємства ВАТ "Укртелеком". Внутрішні війська орендують у даного підприємства необхідну кількість каналів зв'язку в потрібних напрямках та з заданими характеристиками.

У процесі функціонування мережі зв'язку можливі ситуації, коли окремі канали в межах певних територій за різних причин (повені, землетруси, цілеспрямований вплив диверсійно-розвідувальних груп противника тощо) перейдуть в стан непрацездатності.

За таких умов, на тривалий час між підмножиною вузлів мережі зникне зв'язок, але цілими залишаться окремі її лінії. Виникає задача відновлення мінімальної мережної зв'язності даної підмножини вузлових елементів з урахуванням ліній зв'язку, що залишилися у працездатному стані. Зрозуміло, що це тільки перший етап відновлювальних робіт. Мережа, відновлена у такий спосіб, не забезпечуватиме необхідну якість обслуговування, проте все ж таки зв'язок між абонентами існуватиме. При цьому необхідно *мінімізувати* витрати (фінанси, час, кількість працівників технічних служб тощо) на проведення відновлювальних робіт. Відновлення зв'язності мережі зв'язку до початкової топології (базового рівня), як правило, виконують на другому (завершальному) етапі відновлювальних робіт.

В основному, задачі оптимального відновлення зв'язності в діючих мережевих системах вирішують за допомогою відомих методів теорії графів або евристичних методів, заснованих на багаторічному досвіді обслуговуючого технічного персоналу, що для мереж зв'язку із підвищеною щільністю елементів є складною задачею, яку не завжди правильно розв'язують.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача побудови дерев початкового графа достатньо повно розглянута у [1, 2, 3, 4] та багатьох інших джерелах. Проте у зазначених роботах задачу розв'язують на всіх вершинах початкового графа. Прикладне спрямування задачі побудови дерев на графах потребує змін у початковій постановці, а саме: необхідно знайти оптимальне покривне дерево на вибраній підмножині вершин початкового графа *G*.

На базі *дерева найкоротших шляхів* цю задачу розв'язують досить просто – відсікають висячі вершини, що не увійшли до початкової підмножини, разом з інцидентними їм ребрами. Відсікання виконують доти, поки всі висячі вершини не увійдуть у вибрану підмножину. В кінцевому результаті отримаємо структуру $\hat{G}'_{[K]}$, де K – вибрана підмножина вершин початкового графа G. Однак відновлення зв'язності на базі дерева найкоротших шляхів призводить до збільшення загальних витрат на проведення відновлювальних робіт. Тому основне зусилля необхідно зосередити на розробленні методу побудови *мінімального покривного дерева* на вибраній підмножині вершин початкового графа, тобто структури $\tilde{G}'_{[K]}$, де K – вибрана підмножина вершин початкового графа G.

Метою статті є визначення оптимального плану відновлення зв'язності зруйнованої мережі зв'язку на основі синтезу мінімального покривного дерева довільної групи вершин зв'язного графа.

Виклад основного матеріалу. Наразі для побудови мінімальних покривних дерев $\tilde{G}'_{[+]}$, де "+" – уся вузлова основа графа G, використовують відомі методи Пріма, Краскала та ін. [2, 4, 5]. Зазначені методи також цілком можливо застосовувати для пошуку мінімальних покривних дерев $\tilde{G}'_{[K]}$, де K – вибрана підмножина вершин початкового графа G, шляхом перевірки на кожному кроці наявності в будованому дереві зв'язності між усіма вершинами $v_i \in K$. Проведений аналіз даних методів на різних структурах свідчить, що їх використання з подібною метою може дати в кінцевому результаті велику похибку. Справа в тому, що на кожному кроці для зв'язування необхідних вершин $v_i \in K$ до структури шуканого дерева додається ребро мінімальної ваги з наступною перевіркою на наявність циклу. Загальна вага доданих ребер може перевищувати вагу деякого ребра, більшу ніж вага кожного з доданих, та через яке здійснюється оптимальне транзитивне замкнення. Враховуючи вищезазначене сформулюємо та доведемо теорему.

Теорема. Нехай $G = (V, E)$ – довільний зв'язний граф. Мінімальне покривне дерево $\tilde{G}'_{[K]} = (K, E')$ на підмножині вибраних вершин $v_i \in K$ графа G, де $K \subseteq V$, може бути отримане шляхом додавання до підмножини K деякої вершини $v_i \notin K$, якщо через неї здійснюється оптимальне транзитивне замкнення вершин $v_i \in K$.

Доведення. Мінімальним покривним деревом на підмножині вершин $|K| = 2$ є найкоротший шлях, що з'єднує ці дві вершини. Якщо $|K| > 2$, таких шляхів може бути декілька. Таким чином, для отримання зв'язності деяких вершин *s*, *d*, *t* до структури шуканого $\tilde{G}'_{[s,d,t]}$ може бути додано (s, d_1), (d_1, d_2), ..., (d_{n-1}, d_n), (d_n, d) та (s, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n), (t_n, t) ребро. Припустимо, що в структурі початкового G присутня деяка вершина $t_n \notin K$ і ребро (t_n, d), для якого справедлива така умова: $w_{t_n,d} > w_{s,d_1}$, $w_{t_n,d} > w_{d_1,d_2}$, ..., $w_{t_n,d} > w_{d_n,d}$ та $w_{t_n,d} < (w_{s,d_1} + ... + w_{d_{n-1},d_n} + w_{d_n,d})$. Отже, враховуючи ребро (t_n, d), можна знайти шукане дерево $\tilde{G}'_{[s,d,t]}$.

У даній ситуації суміжні ребра, вагові коефіцієнти яких стоять в дужках, можуть значно збільшувати загальну вагу $\tilde{G}'_{[s,d,t]}$. Таким чином, поставлену задачу треба розв'язувати з урахуванням можливого додавання до структури шуканого дерева $\tilde{G}'_{[K]}$ додаткових вершин $v_i \notin K$, вага транзитивного замкнення через які забезпечить оптимум загальної ваги. Теорема доведена.

Наприклад, є деяка мережа зв'язку. Мінімальне покривне дерево $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$, збудоване за методом Краскала, виділене на рис. 1 більш темними лініями.

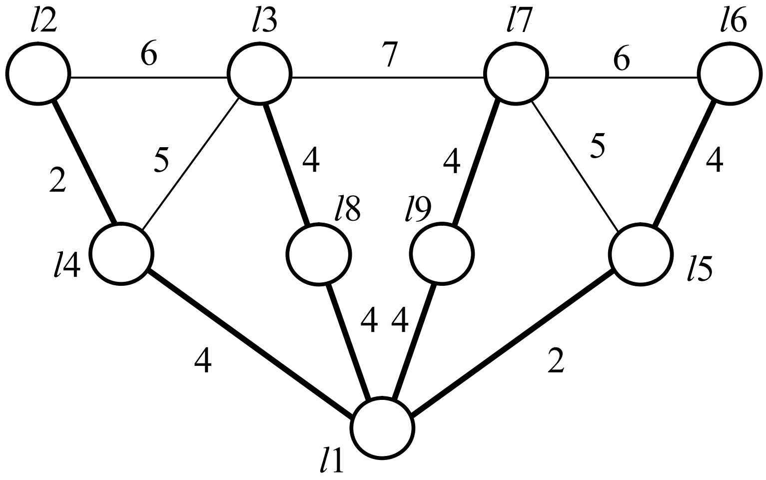

Рис. 1. Покривне дерево $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$ початкового графа G,

збудоване за методом Краскала

Тоді план $P_{вз} = \{(l1,l4),\ (l1,l8),\ (l1,l9),\ (l1,l5),\ (l4,l2),\ (l8,l3),\ (l9,l7),\ (l5,l6)\}$, а значення відповідної функції загальної ваги $W_{вз} = \sum_{(i,j)\in P_{вз}} w_{ij} = 28$.

Можна помітити, що оптимальне $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$ складається з шести ребер плану $P_{вз} = \{(l1,l4), (l1,l5), (l4,l2), (l4,l3), (l5,l7), (l5,l6)\}$, а $W_{вз} = \sum_{(i,j)\in P_{вз}} w_{ij} = 22$ (рис. 2). Абсолютна похибка складає 6 одиниць.

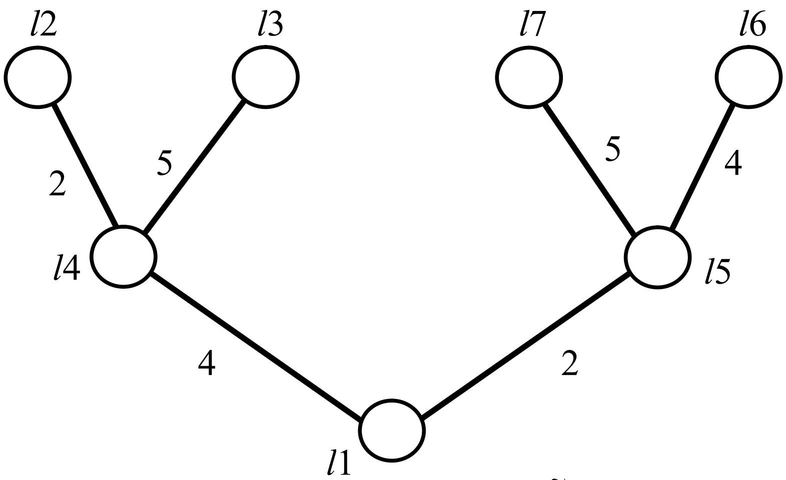

Рис. 2. Оптимальне мінімальне покривне дерево $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$ початкового графа G

Метод, що пропонується, засновано на заміні початкової структури графа G структурою $\tilde{G}'_{[*]}$, яку отримують шляхом введення до G всіх можливих транзитивних замкнень та корегування їх ваги між вершинами $v_i \in K$, а саме:

$$w_{\langle i,j\rangle_{ТЗ}} := w_{i,z} + w_{z,j}, \tag{1}$$

де $v_z \notin K$ – вершина з початкового графа G, що вилучається разом зі своїми інцидентними ребрами.

Далі на отриманій структурі $\tilde{G}'_{[*]}$ за допомогою одного із відомих методів будують мінімальне покривне дерево. Після цього між суміжними вершинами збудованого дерева за початковим G знаходять найкоротші шляхи з відповідною топологією.

Структуру $\tilde{G}'_{[*]}$ отримують на матриці найкоротших шляхів R_G за матрицею ваги початкового графа G. Обчислення цього масиву надає інформацію про існування можливого транзитивного замкнення між всіма парами вершин та найменші значення цих зв'язків. Згідно з формулою (1), частину вершин $v_i \notin K$ вилучимо з початкового G, решта вершин $v_i \notin K$ залишиться для побудови структури $\tilde{G}'_{[*]}$. Відзначимо важливий висновок теореми.

<u>Висновок</u>. Зменшити вагу транзитивного замкнення вершин $v_i \in K$ через деяку вершину $v_i \notin K$ можливо, починаючи з $|K| = 3$.

Представимо метод у вигляді семи кроків.

Крок № 1: За матрицею ваги початкового графа G, яка описує витрати на відновлення зв'язності до базового рівня топології, методом Флойда обчислити масив найкоротших шляхів R_G (найменших транзитивних замкнень між всіма парами вузлових елементів графа G). З метою відрізнити значущий нуль $\left(e_{ij} \in E\right.$, якщо лінія справна, то $\left.w(e_{ij}) = 0\right)$ від незначущого нуля $\left(e_{ij} \notin E\right.$, якщо лінія не існує – $\left.w(e_{ij}) = 0\right)$ використовувати *A*-символіку, де $A = const$, $A >> \forall\ w(e_{ij})$.

Крок № 2: Для кожної вершини $v_i \notin K$ масиву R_G визначити всі можливі набори по три вершини $v_i \in K$. Результатом операції є індекси стовпців (вершин $v_i \in K$) *idx*1, *idx*2, *idx*3. Загальна сума значень найкоротших шляхів транзитивних замкнень, що з'єднують дані три вершини $v_i \in K$ з вибраною $v_i \notin K$ – $\sum w^{v_i \notin K}_{[v_{idx1}, v_{idx2}, v_{idx3}] \in K}$.

Крок № 3: Для кожної вершини $v_i \in K$ за індексами, отриманими на кроці № 2, обчислити відповідну суму $\sum w^{v_i \in K}_{[v_{idx1}, v_{idx2}, v_{idx3}] \in K}$.

Крок № 4: Вершини $v_i \notin K$, для яких виконується нерівність

$$\sum w^{v_i \notin K}_{\left[\{v_{idx1}, v_{idx2}, v_{idx3}\} \in K\right]} < \sum w^{v_i \in K}_{\left[\{v_{idx1}, v_{idx2}, v_{idx3}\} \in K\right]},\ i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

додати до складу початкової підмножини вибраних вершин K.

Вершини $v_i \notin K$, для яких нерівність (2) не виконується, вилучити разом зі всіма інцидентними ребрами зі структури початкового G з відповідним корегуванням масиву R_G. Якщо всі вершини $v_i \notin K$ проаналізовано, – перейти до кроку № 5, у протилежному випадку – до кроку № 2. Дійсно, якщо нерівність (2) виконується, то є деяка вершина $v_i \notin K$, через яку здійснюється оптимальне, з точки зору загальної ваги, транзитивне замкнення будь-яких трьох вершин з підмножини K, ніж без її урахування. Тому залучення її для побудови структури $\tilde{G}'_{[*]}$ поліпшить загальний шуканий оптимум. У разі вилучення будь-якої $v_i \notin K$, інформація про неї все рівно залишається в значенні найкоротших шляхів у масиві R_G, якщо такі існують.

Крок № 5: На зміненій таким чином підмножині вершин K, згідно із скорегованим масивом R_G, побудувати повнозв'язну структуру $\tilde{G}'_{[*]}$ початкового графа G. Правомірність подібної операції полягає в тому, що в отриманій структурі $\tilde{G}'_{[*]}$, відносно будь-якої пари вершин $v_i \in K$, за допомогою значень найкоротших шляхів зберігається інформація про всі оптимальні зв'язки.

Крок № 6: На структурі $\tilde{G}'_{[*]}$ відомим методом Краскала побудувати мінімальне покриваюче дерево. Отримати структуру $\tilde{G}''_{[*]}$.

Крок № 7: Кожне ребро структури $\tilde{G}''_{[*]}$ за початковою структурою G ідентифікувати методом Дейкстри. Отримати шукане $\tilde{G}'_{[K]} = (K, E')$, $E' \subset E, K \subset V$.

Надамо геометричну інтерпретацію розглянутого методу. Є найкоротшезв'язані мережі с довжинами L_1 та L_2 (див. рис. 3).

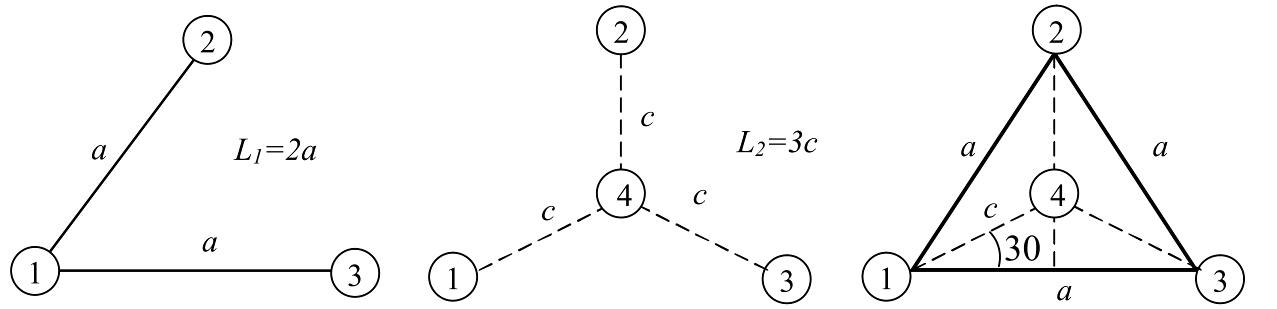

Рис. 3. Геометрична інтерпретація методу

Величина ребра *c*: $\cos 30^\circ = \frac{a/2}{c} \rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Отже, в умовах рівнобедреного трикутника (або близького до нього) завжди буде виконуватись нерівність $L_1 > L_2$.

Проілюструємо метод на прикладі графа (див. рис. 1). Як і раніше, необхідно знайти мінімальне покривне дерево $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$. Обчислена матриця найкоротших шляхів R_G має такий вигляд:

$R_G =$ (3)

	+	+	+	−	−	+	+	−	−	
	l1	**l2**	**l3**	**l4**	**l5**	**l6**	**l7**	**l8**	**l9**	
l1	0	6	8	4	2	6	7	4	4	+
l2	6	0	6	2	8	12	13	10	10	+
l3	8	6	0	5	10	13	7	4	11	+
l4	4	2	5	0	6	10	11	8	8	−
l5	2	8	10	6	0	4	5	6	6	−
l6	6	12	13	10	4	0	6	10	10	+
l7	7	13	7	11	5	6	0	11	4	+
l8	4	10	4	8	6	10	11	0	8	−
l9	4	10	11	8	6	10	4	8	0	−

Знаком “+” позначені вершини $v_i \in K$, а знаком “–” позначені вершини $v_i \not\subset K$. Згідно з кроком № 2, серед вершин $v_i \notin K$ визначаємо $w^{v_i \notin K}_{[v_{idx1}, v_{idx2}, v_{idx3}]\min}$. Для $l4$ це $w^{l4 \notin K}_{[l1,l2,l3]\min} = 11$. Далі, згідно з кроком № 3, розраховуємо для кожної вершини $v_i \in K$ відповідну вагу $w^{v_i \in K}_{[l1,l2,l3]}$ і, згідно з кроком № 4, зрівнюємо її з $w^{l4 \notin K}_{[l1,l2,l3]\min}$. Так $w^{l1 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 14$, $w^{l2 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 12$, $w^{l3 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 14$, $w^{l6 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 31$, $w^{l7 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 27$. Згідно з нерівністю (2), вершина $l4$ додається до підмножини K. Для вершини $l5$ відповідна вага $w^{l5 \notin K}_{[l1,l6,l7]\min} = 11$. Для неї теж виконується нерівність (2) і вона також додається до підмножини K. Для вершин $l8$ та $l9$ $w^{l8 \notin K}_{[l1,l2,l3]\min} = 18$, $w^{l9 \notin K}_{[l1,l2,l7]\min} = 18$. Для них нерівність (2) не виконується, тому що є $w^{l1 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 14$, $w^{l2 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 12$, $w^{l3 \in K}_{[l1,l2,l3]} = 14$ та $w^{l1 \in K}_{[l1,l2,l7]} = 13$ відповідно. Ці вершини зі структури початкового G вилучають, а в масиві R_G відповідні їм рядки та стовпці заміняють нулями. Отже, матриця найкоротших шляхів R_G графа $\tilde{G}'_{[*]}$ матиме такий вигляд:

$$
\boldsymbol{R_G} = \begin{array}{c|ccccccccc c}
 & + & + & + & + & + & + & + & - & - & \\
 & \boldsymbol{l1} & \boldsymbol{l2} & \boldsymbol{l3} & \boldsymbol{l4} & \boldsymbol{l5} & \boldsymbol{l6} & \boldsymbol{l7} & \boldsymbol{l8} & \boldsymbol{l9} & \\
\hline
\boldsymbol{l1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l3} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{13} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l5} & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l6} & \mathbf{6} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l7} & \mathbf{7} & \mathbf{13} & \mathbf{7} & \mathbf{11} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & + \\
\boldsymbol{l8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & - \\
\boldsymbol{l9} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -
\end{array}. \qquad (4)
$$

Як видно з матриці (4), вершини $l4$ і $l5$ увійшли до підмножини K і прийматимуть участь у

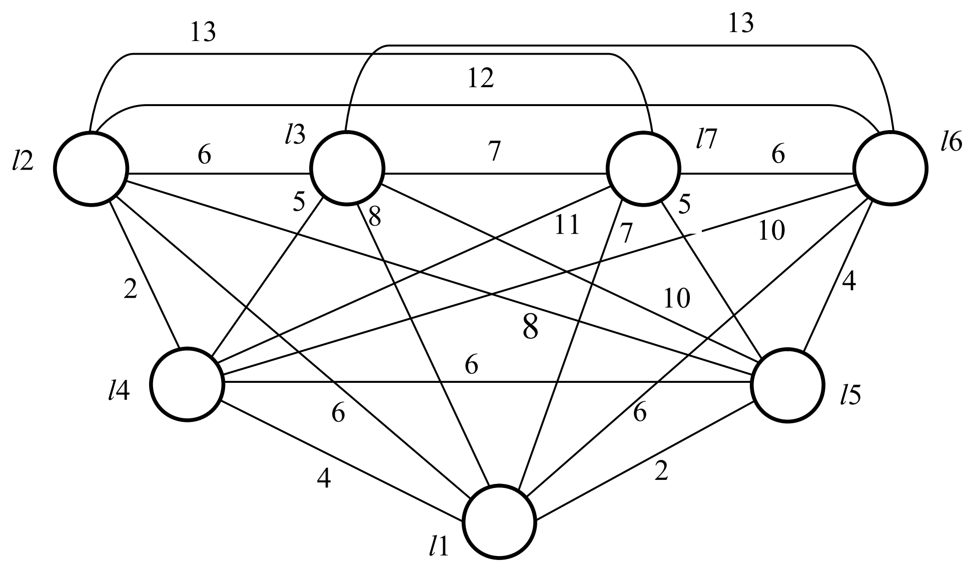

Рис. 4. Структура $\tilde{G}'_{[*]}$ початкового графа G

побудові шуканого мінімального покривного дерева $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$. Згідно з кроком № 5, за матрицею (4) збудуємо структуру $\tilde{G}'_{[*]}$ (див. рис. 4).

Застосовуючи до структури $\tilde{G}'_{[*]}$ відомий метод Краскала та ідентифікуючи в отриманому дереві за початковим графом G кожне його ребро між суміжними вершинами і ребрами відповідного найкоротшого шляху (метод Дейкстри), отримаємо шукане мінімальне покривне дерево $\tilde{G}'_{[1,2,3,6,7]}$, яке представлено на рис. 2.

Висновки

У статті розглянуто метод визначення оптимального плану відновлення мережної зв'язності між визначеною підмножиною вузлових елементів початкового мережного об'єкта. Застосування даного методу під час проведення відновлювальних робіт дозволить визначати план першочергових заходів, реалізація яких забезпечить мінімальний рівень зв'язності між елементами мережі, та який на першому етапі можна вважати достатнім для забезпечення управління військами.

Список використаних джерел

1. Берж К. Теория графов и ее применение: пер. с фр. / К. Берж; под ред. И. В. Вайнштейна. – М. : ИИЛ, 1962. – 319 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов: пер. с пол. / В. Липский. – М. : Мир, 1988. – 213 с.
4. Форд Л. Р. Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. – М. : Мир, 1966. – 276 с.
5. Прим Р. К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения / Р. К. Прим // Кибернетический сборник. – Вып. 2. – М. : ИИЛ, 1961. – С. 95–107.

Стаття надійшла 14.05.2010 р.