

УДК 517.958

В. Д. Душкін

ЧИСЕЛЬНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ

Досліджуються властивості комплексних коренів характеристичного рівняння задачі Штурма – Ліувіля, що виникає при розв'язанні задач дифракції E та H поляризованих хвиль у випадку врахування поверхневого імпедансу. Отримано оцінки обмеженості уявної частини коренів характеристичного рівняння і показано єдиність коренів на періоді функції $\text{ctg}(\pi \cdot z)$.

Постановка проблеми. Проблема, що розглядається у статті, впливає із задачі чисельного моделювання двовимірних дифракційних полів на напівпрозорих неперіодичних решітках, які містять прямокутні хвилеводні канали, у випадку врахування поверхневого імпедансу полів (рис. 1). Умови Леонтовича на поверхні структури у випадку E-поляризації приводять до граничної умови для компоненти поля E_x :

$$\frac{\partial}{\partial n} E_x - \hbar_E \cdot E_x = 0, \quad \hbar_E = \frac{i\omega\mu_0\mu}{Z_s}, \quad \Re(\hbar_E) > 0 \quad \text{Im}(\hbar_E) > 0, \quad (1)$$

а у випадку H-поляризації – до граничної умови для компоненти поля H_x :

$$\frac{\partial}{\partial n} H_x - \hbar_H \cdot H_x = 0, \quad \hbar_H = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s, \quad \Re(\hbar_H) < 0 \quad \text{Im}(\hbar_H) > 0 \quad (2)$$

(значення величин дані в системі СИ).

У статті вводиться позначення \hbar і використовується тоді, коли формули справедливі для величин \hbar_E й \hbar_H одночасно.

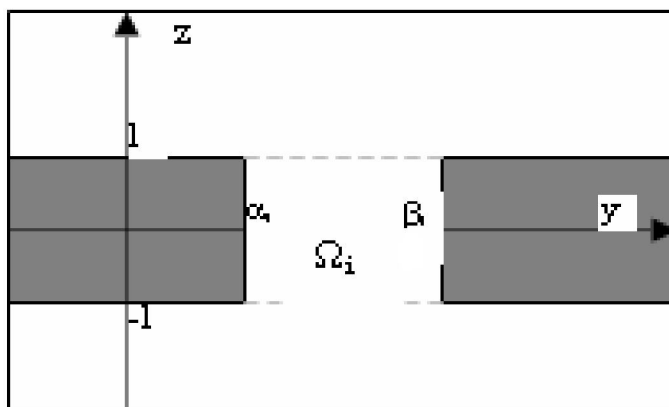


Рис 1. Структура решітки

У роботах [1, 2] було запропоновано алгоритм чисельного моделювання дифракційних полів, описаних вище. Для реалізації цього алгоритму необхідно знайти розв'язок задачі Штурма – Ліувіля:

$$\omega'' + \lambda\omega = 0, \quad (3)$$

$$\omega'(\alpha_i) - \hbar\omega(\alpha_i) = 0, \quad \omega'(\alpha_i) + \hbar\omega(\alpha_i) = 0 \quad \omega'(\beta_i) + \hbar\omega(\beta_i) = 0,$$

які мають вигляд

$$\omega^i(\lambda_n^i)(y) = \frac{\sqrt{\lambda_n^i} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n^i} \cdot (y - \alpha_i)\right) + h \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n^i} \cdot (y - \alpha_i)\right)}{\sqrt{\lambda_n^i + h^2}}, \quad (4)$$

де λ_n^i – комплексні корені характеристичного рівняння задачі Штурма – Ліувіля:

$$(\hbar^2 - \lambda) \sin(\sqrt{\lambda} \cdot (\beta_i - \alpha_i)) + 2\hbar\sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot (\beta_i - \alpha_i)) = 0, \quad (5)$$

де $\sqrt{\lambda_n^i}$ належать області

$$C_\lambda = \{z \in \mathbb{C}, (\Re(z) > 0) \cup (\Re(z) = 0 \wedge \Im(z) > 0)\}. \quad (6)$$

Рівняння (5) також можна подати у вигляді

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\hbar} - \frac{\hbar}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \operatorname{ctg}((\beta - \alpha) \cdot \sqrt{\lambda}). \quad (7)$$

Уведемо величини:

$$z = \theta \cdot \sqrt{\lambda}, \quad h = \hbar \cdot \theta, \quad \theta = \frac{\beta - \alpha}{\pi}. \quad (8)$$

Тоді нові позначення рівнянню (7) нададуть вигляду

$$\frac{z}{h} - \frac{h}{z} = 2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot z). \quad (9)$$

Мета дослідження. Становить інтерес діапазон частот, у якому ширина хвильового каналу рівняється кільком довжинам хвиль $\frac{1}{\pi} \leq \partial\ell = k \cdot \frac{\beta - \alpha}{\pi} = k \cdot \theta \leq \frac{10}{\pi}$.

У випадку Е-поляризації

$$h_E = \hbar_E \cdot \theta = \frac{i\omega\mu_0\mu}{Z_s} \cdot \theta = i \cdot \partial\ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot c}{Z_s} = i \cdot \partial\ell \cdot \frac{Z_0}{Z_s}$$

і величина h_E змінюється в межах від 20 до $1,2 \cdot 10^5$.

У випадку Н-поляризації

$$h_H = \hbar_H \cdot \theta = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s \cdot \theta = i\partial\ell \cdot \varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s \cdot c$$

і величини h_H змінюється в межах від 0 до $5 \cdot 10^2$.

Таким чином, для проведення чисельного моделювання полів на структурах, які були описані вище, становить інтерес спосіб знаходження коренів рівняння (9) при більших і малих значеннях комплексного параметра h .

Виклад основного матеріалу.

1. Дослідження властивостей коренів рівняння (9) і звуження області їх пошуку

Нехай

$$h = |h| \cdot e^{i\beta}, \quad z = |z| \cdot e^{i\alpha}, \quad a = \left| \frac{z}{h} \right|, \quad \varphi = \beta - \alpha, \quad z = x + i \cdot y. \quad (10)$$

Тоді для дійсної і уявної частин рівняння (9) справедливі такі рівності:

$$\left(a - \frac{1}{a} \right) \cdot \cos(\varphi) = \frac{2 \cdot \sin(2\pi x)}{ch(2\pi y) - \cos(2\pi x)}, \quad (11)$$

$$\left(a + \frac{1}{a} \right) \cdot \sin(\varphi) = \frac{2 \cdot sh(2\pi y)}{ch(2\pi y) - \cos(2\pi x)}. \quad (12)$$

Із рівняння (11) одержуємо, що при $a < 1$ розв'язку задовольняють нерівності $n - 0,5 \leq \operatorname{Re}(z) = x \leq n$, а при $a > 1$ розв'язки задовольняють нерівності $n \leq \operatorname{Re}(z) = x \leq n + 0,5$.

Для коренів рівняння в області $|y| \geq M$ виконуються нерівності:

$$2 \cdot th(\pi M) \leq \left(a + \frac{1}{a} \right) \cdot |\sin(\varphi)| \leq 2 \cdot \operatorname{cth}(\pi M). \quad (13)$$

$$\left| a - \frac{1}{a} \right| \cdot |\cos \varphi| \leq \frac{2}{\operatorname{sh}(2\pi y)}. \quad (14)$$

Аналіз рівняння (12) з урахуванням (6,8) показує, що у випадку Е-поляризації $0 \leq \alpha \leq \beta$. Отже, область можливого знаходження коренів обмежена за φ :

$$\left(0 \leq \varphi \leq \beta < \frac{\pi}{2} \right). \quad (15)$$

Чисельний та аналітичний аналіз нерівностей (13–14) показує, що у випадку Е-поляризації для будь-якого значення M існують такі значення a_M та φ_M , що розв'язки системи нерівностей (13–14) знаходяться усередині обмеженої області:

$$\varphi_M \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a_M \leq a \leq \frac{1}{a_M}. \quad (16)$$

Для значення $M = 0,317$ ця область набуде такого вигляду (рис. 2).

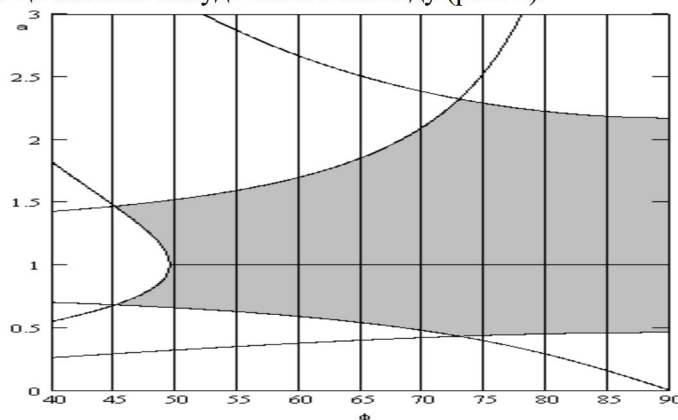


Рис. 2. Множина розв'язків системи нерівностей 13–15 при $M = 0,317$

На рис. 3 наведено графік залежностей величин φ_M від M .

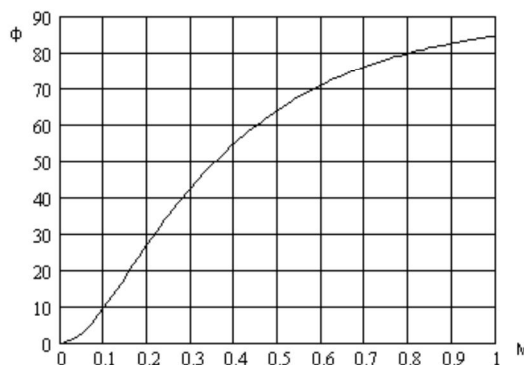


Рис. 3. Залежність величини φ_M від M

Оскільки $\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M = \frac{\pi}{2}$ й $\varphi < \beta < \frac{\pi}{2}$, для кожного β існує таке значення M , що в області $|\operatorname{Im}(z)| > M$ у рівняння (9) не буде коренів. У табл. 1 для низки значень наведено максимальні значення M , для яких в області $|\operatorname{Im}(z)| > M$ не буде коренів.

Т а б л и ц я 1

M	0,103	0,159	0,217	0,317	0,453	1
β	10^0	20^0	30^0	45^0	60^0	84.59^0
$\operatorname{arctg} \beta = \operatorname{Im} z / \operatorname{Re} z$	0,179	0,364	0,579	1	1,733	10,504

У випадках, цікавих для практики $\beta \leq \frac{\pi}{4}$, а отже, й у випадку Е-поляризації усі корені рівняння (9) перебувають в області $|\text{Im}(z)| \leq 0,317$.

У випадку Н-поляризації корені рівняння (9) перебувають усередині сектора $0 < \beta - \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \beta + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$ і розв'язки системи нерівностей (13–14) для кожного значення M перебувають усередині обмеженої області. Вид області можливого знаходження коренів рівняння (9) у координатах (φ, α) у випадку $|\text{Im}(z)| > M = 0,19$ показано на рис. 4 темним кольором.

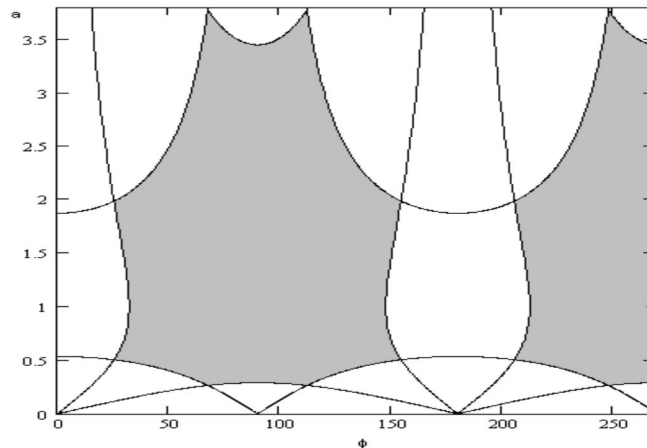


Рис. 4. Область можливого знаходження коренів рівняння (9) у координатах (φ, α) у випадку $|\text{Im}(z)| > M = 0,19$

Нескладно перевірити у випадку Н-поляризації, коли значення $h_H \leq 5 \cdot 10^{-2}$, для коренів рівняння (9) справедлива нерівність $|\text{Im}(z)| < 0,19$.

2. Знаходження областей існування і єдиності коренів рівняння (9).

Для побудови процедури чисельного знаходження коренів рівняння (9) становить інтерес питання про їх кількість на періоді функції $\text{ctg}(\pi \cdot z)$.

Надамо рівнянню такого вигляду:

$$\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z) + 2 \frac{z}{h} \cdot \cos(\pi \cdot z) = 0. \quad (17)$$

Уведемо позначення: $f(z) = \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z)$, $g(z) = 2 \frac{z}{h} \cdot \cos(\pi \cdot z)$.

Функція $f(z)$ має в кожній із областей $\Omega_n^s = \{z \mid |\text{Im}(z)| \leq M \wedge n - 0,5 \leq \text{Re}(z) \leq n + 0,5\}$ $n = 1, 2, \dots, \infty$ єдиний корінь, якщо значення $z = h$ не належить цій області. Згідно з теоремою Руше для єдиності кореня рівняння (9) в кожній із областей Ω_n^s достатньо виконання умови

$$|f(z)| = \left| \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z) \right| \geq |1 - a^2| \cdot |\sin(\pi \cdot z)| > 2a |\cos(\pi \cdot z)| = 2 \left| \frac{z}{h} \right| \cdot \cos(\pi \cdot z) = |g(z)|. \quad (18)$$

На межах областей Ω_n^s виконується нерівність $|\sin(\pi \cdot z)| \geq |\cos(\pi \cdot z)| \cdot \text{th}(\pi M)$, отже, умова (18) виконується при

$$|1 - a^2| \cdot \text{th}(\pi M) > 2a. \quad (19)$$

Розв'язком нерівності (19) є значення $a \in \left(0, \sqrt{\text{cth}^2(\pi M) + 1 - \text{cth}(\pi M)}\right) \cup \left(\sqrt{\text{cth}^2(\pi M) + 1 + \text{cth}(\pi M)}, \infty\right)$.

Через довільність значення M одержуємо, що умови єдиності виконуються для областей Ω_n^s , у кожній точці якої виконується умова:

$$a \in (0, \sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} + 1, \infty). \quad (20)$$

Це твердження справедливе для обох поляризацій, наслідком його у випадку Н-поляризації є існування й єдиність коренів рівняння в областях Ω_n^s у разі, коли $n \geq 1$.

У випадку Н-поляризації для всіх точок області $\Omega_0^{[0,19;0,5]} = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| < 0,19 \wedge 0,19 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0,5\}$ виконуються нерівності $a > 1$ та $\cos(\varphi) < 0$. Ці нерівності показують, що в області $\Omega_0^{[0,19;0,5]}$ немає коренів рівняння (11). На межах області $\Omega_0^s = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq 0,19 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0,19\}$ справедливі нерівності:

$$\left| (h^2 - z^2) \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} \right| \geq (|z|^2 - 0,05^2) \cdot \left| \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} \right| > 0,1 \cdot |\cos(\pi \cdot z)| \geq |2h \cdot \cos(\pi \cdot z)| \quad (21)$$

і, отже, відповідно до теореми Руше у даній області рівняння має, як і функція $(h^2 - z^2) \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z}$, два корені. Функція $(h^2 - z^2) \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z}$, непарна і тому в області $|z| \leq 0,19 \wedge \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Re}(z) > 0$ знаходиться тільки один корінь рівняння (9).

Дослідимо, при яких значеннях a у випадку Е-поляризації в областях $\Omega_n^c = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq M \wedge n \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+1\}$ $n = 1, 2, \dots, \infty$ перебуває тільки один корінь рівняння. Функція $g(z)$ має в кожній з областей Ω_n^c єдиний корінь.

Для єдиності кореня рівняння в кожній із областей Ω_n^c достатньо виконання умови

$$|f(z)| = \left| \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z) \right| = |1 - a^2 \cdot e^{2i\varphi}| \cdot |\sin(\pi \cdot z)| < 2a |\cos(\pi \cdot z)| = 2 \left| \frac{z}{h} \right| \cdot |\cos(\pi \cdot z)| = |g(z)|. \quad (22)$$

Нехай $\varphi_n^M = \max \varphi$, $\varphi \in \Omega_n^c$. Тому що

$$|1 - a^2 \cdot e^{2i\varphi}| = \sqrt{(1 - a^2 \cdot \cos(2\varphi))^2 + a^4 \cdot \sin^2(2\varphi)} = \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi)} \quad (23)$$

і на межах областей Ω_n^c виконується нерівність $|\sin(\pi \cdot z)| \cdot \operatorname{th}(\pi M) \leq |\cos(\pi \cdot z)|$, і отже, умова (23) виконується при

$$\max_{\varphi} \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi)} \cdot \operatorname{th}(\pi M) = \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi_n^M)} \cdot \operatorname{th}(\pi M) < 2a. \quad (24)$$

Нерівність (24) справедлива при

$$a \in \left(\sqrt{2c \operatorname{th}^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M)} - \sqrt{(2c \operatorname{th}^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M))^2 - 1}, \right. \\ \left. \sqrt{2c \operatorname{th}^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M)} + \sqrt{(2c \operatorname{th}^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M))^2 - 1} \right). \quad (25)$$

Через властивості величин Z_s справедлива нерівність $\arg(h_E) = \beta \leq \frac{\pi}{4}$. У цьому випадку множина всіх можливих коренів рівняння (9) знаходиться в області $|\operatorname{Im}(z)| < M = 0,137$. Становить інтерес випадок, коли $|\operatorname{Im}(z)| < M = 0,137$ та $a \geq \sqrt{2} - 1 > 0,4$. Тоді $\forall z \in \Omega_n^c \quad |\arg(z)| < \varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{0,317}{0,4 \cdot h} \right)$.

У випадку $h = 20$ величина $\varepsilon = 0,0397$ (рад) або $2,27^\circ$. Тоді в областях Ω_n^c виконана умова

Оскільки $M = 0,137$ і $0 \leq \varphi \leq 48^\circ$ із (25) одержуємо, що умови єдиності виконуються для областей Ω_n^c , у кожній точці якої виконуються умови $a \in (0,391, 2,563)$. Отриманий результат з урахуванням (20) дає єдиність кореня рівняння (9) на періоді функцій $\operatorname{ctg}(\pi \cdot z)$.

3. Чисельні значення коренів.

Далі на рисунках подано корені рівняння (9) у випадку Е-поляризації при значеннях h , які становлять практичний інтерес.

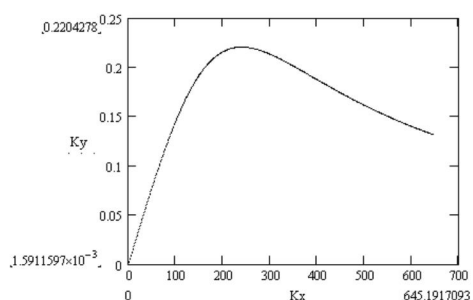


Рис. 5

$$Z = 3,01 + i \cdot 4,01, \\ \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$$

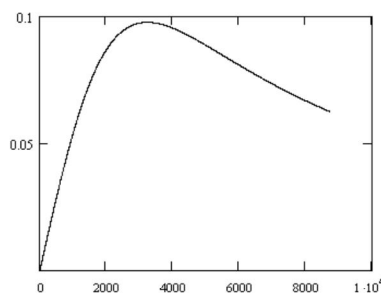


Рис. 6

$$Z = 1,10491 \cdot 10^{-2} + i \cdot 3,54889 \cdot 10^{-2}, \\ \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$$

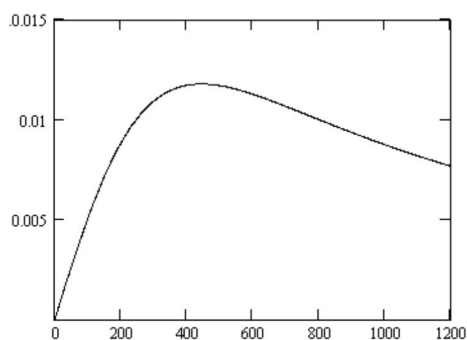


Рис. 7

$$Z = 1 \cdot 10^{-2} + i \cdot 27 \cdot 10^{-2} \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$$

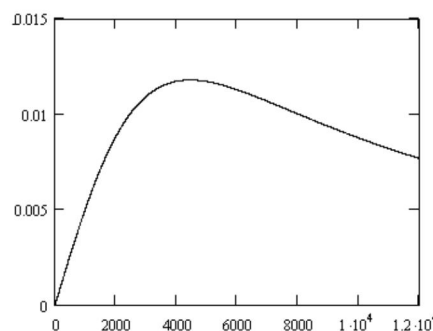


Рис. 8

$$Z = 1 \cdot 10^{-2} + i \cdot 27 \cdot 10^{-2} \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$$

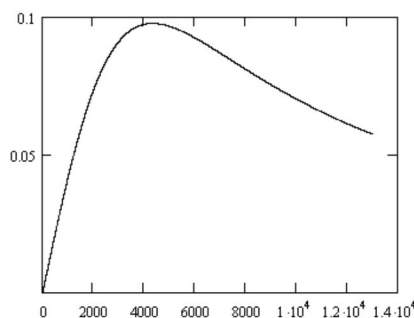


Рис. 9

$$Z = 8,23657 \cdot 10^{-3} + i \cdot 2,64552 \cdot 10^{-2}, \\ \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1.$$

Графік на рис. 6 за формою схожий на графік, зображений на рис. 9, де $Z = 1,10491 \cdot 10^{-2} + i \cdot 3,54889 \cdot 10^{-2}$ (у даних значень Z однакові аргументи β).

У табл. 2 наведено корені рівняння (9) у випадку Е-поляризації. Чисельний експеримент показав малу відмінність коренів рівняння (9) від цілих чисел у разі, якщо їх модуль більше 1. У випадках, розглянутих у чисельному експерименті, спостерігався збіг коренів рівняння (9) при різних значеннях $\partial \ell$ у разі, якщо їх модуль перевищує 1.

$Z = 8,23657 \cdot 10^{-3} + i \cdot 2,64552 \cdot 10^{-2}$		$Z = 1,10491 \cdot 10^{-2} + i \cdot 3,54889 \cdot 10^{-2}$	
$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$
$5,804 \cdot 10^{-4} + i \cdot 3,817 \cdot 10^{-3}$	$1,836 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0,012$	$6,722 \cdot 10^{-4} + i \cdot 4,42 \cdot 10^{-3}$	$2,13 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0,01$
$1,0 + i \cdot 4,431 \cdot 10^{-6}$	$1,0 + i \cdot 4,432 \cdot 10^{-5}$	$1,0 + i \cdot 5,944 \cdot 10^{-6}$	$1,000 + 5,946 \cdot 10^{-5}$
$2,0 + i \cdot 2,215 \cdot 10^{-6}$	$2,0 + i \cdot 2,215 \cdot 10^{-6}$	$2,0 + i \cdot 2,972 \cdot 10^{-6}$	$2,0 + i \cdot 2,972 \cdot 10^{-6}$
$3,0 + i \cdot 1,477 \cdot 10^{-6}$	$3,0 + i \cdot 1,477 \cdot 10^{-6}$	$3,0 + i \cdot 1,981 \cdot 10^{-6}$	$3,0 + i \cdot 1,981 \cdot 10^{-6}$
$4,0 + i \cdot 1,108 \cdot 10^{-6}$	$4,0 + i \cdot 1,108 \cdot 10^{-6}$	$4,0 + i \cdot 1,486 \cdot 10^{-6}$	$4,0 + i \cdot 1,486 \cdot 10^{-6}$
$5,0 + i \cdot 8,861 \cdot 10^{-7}$	$5,0 + i \cdot 8,861 \cdot 10^{-7}$	$5,0 + i \cdot 1,189 \cdot 10^{-6}$	$5,0 + i \cdot 1,189 \cdot 10^{-6}$
$6,0 + i \cdot 7,384 \cdot 10^{-7}$	$6,0 + i \cdot 7,384 \cdot 10^{-7}$	$6,0 + i \cdot 9,905 \cdot 10^{-7}$	$6,0 + i \cdot 9,905 \cdot 10^{-7}$
$7,0 + i \cdot 6,329 \cdot 10^{-7}$	$7,0 + i \cdot 6,329 \cdot 10^{-7}$	$7,0 + i \cdot 8,490 \cdot 10^{-7}$	$7,0 + i \cdot 8,490 \cdot 10^{-7}$
$8,0 + i \cdot 5,538 \cdot 10^{-7}$	$8,0 + i \cdot 5,538 \cdot 10^{-7}$	$8,0 + i \cdot 7,429 \cdot 10^{-7}$	$8,0 + i \cdot 7,429 \cdot 10^{-7}$
$9,0 + i \cdot 4,923 \cdot 10^{-7}$	$9,0 + i \cdot 4,923 \cdot 10^{-7}$	$9,0 + i \cdot 6,604 \cdot 10^{-7}$	$9,0 + i \cdot 6,604 \cdot 10^{-7}$
$10,0 + i \cdot 4,430 \cdot 10^{-7}$	$10,0 + i \cdot 4,430 \cdot 10^{-7}$	$10,0 + i \cdot 5,943 \cdot 10^{-7}$	$10,0 + i \cdot 5,943 \cdot 10^{-7}$

Висновки та перспективи подальших розробок

Отримано оцінки обмеженості уявної частини коренів характеристичного рівняння і показано єдиність коренів на періоді функцій $\text{ctg}(\pi \cdot z)$. Результати є основою для проведення чисельного експерименту за схемою, запропонованою в роботах моделювання.

Список використаних джерел

1. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов / В. Д. Душкин // Доп. НАН України. – 1999. – № 9. – С.11–15.
2. Душкин В. Д. Применение метода сингулярных интегральных преобразований к решению двумерных задач дифракции электромагнитных волн на сверхпроводящем слое с прямоугольными волноведущими каналами / В. Д. Душкин // Радиотехника. Электромагнитные волны и электронные системы. – 1999. – № 2. – Т.4. – С. 54 – 59.

Стаття надійшла до редакції 9.10.2007 р.