

УДК 539.3

О. К. Морачковський, Ю. В. Ромашов

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХИБОК ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ПОВЗУЧОСТІ ІЗ ПОШКОДЖУВАНІСТЮ МАТЕРІАЛІВ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

*Досліджено похибки одержаних методом Бубнова–Гальоркіна наближених розв'язків задач повзучості із пошкоджуваністю матеріалів елементів конструкцій. Встановлено необхідність суттєвого збільшення пробних функцій просторових координат та точності обчислень для забезпечення точності наближених розв'язків, що відповідають близьким до одиниці значенням параметру пошкоджуваності.*

**Постановка проблеми.** Теоретичний аналіз процесів накопичення незворотних деформацій повзучості та пошкоджень під час експлуатації елементів конструкцій зводиться до розв'язання несталих задач з невідомими функціями, залежних від просторових координат та часу. Вид нелінійності рівнянь стану твердого тіла при повзучості практично виключає одержання аналітичних розв'язків, що робить актуальними чисельні методи розв'язання задач повзучості. Відсутність аналітичних розв'язків ускладнює встановлення загальних властивостей розв'язків задач повзучості та можливостей щодо тестування програмних засобів. Означені особливості задач повзучості ставлять низку проблем щодо створення ефективних методів їхнього розв'язування та суттєво впливають на можливості вирішення практичних завдань з аналізу міцності й довговічності відповідальних елементів конструкцій енергетичних парових та газових турбін, газоперекачувальних агрегатів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Відомі на сьогодні математичні методи розв'язування несталих задач можна умовно поділити на дві великі групи: перша – розв'язання послідовності крайових задач на кроках інтегрування вихідних рівнянь у часі, друга – розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) відносно функцій часу. Похибки наближених розв'язків задач теорії повзучості із пошкоджуваністю матеріалів суттєво залежать від методів, за якими їх одержують. У задачах повзучості переважно використовують першу групу методів [1], які потребують параметризації задач повзучості за часом. Методи другої групи є більш загальними [2], але у задачах повзучості зараз вони практично не використовуються. В існуючих роботах ці методи еквівалентні окремій параметризації задач повзучості за часом [3]. Проте метод Бубнова–Гальоркіна дозволяє одержувати розподіли невідомих задач у всіх точках простору для кожного моменту часу відповідно до прийнятого вигляду їхніх апроксимацій та точності обчислень.

**Метою статті** є вивчення впливу точності обчислень та виду апроксимацій невідомих задач повзучості з пошкодженням матеріалу на похибки наближених розв'язків, які одержують за методом Бубнова–Гальоркіна.

**Виклад основного матеріалу.** Для досягнення сформульованої мети виконано порівняння результатів, що отримані за числовими експериментами з відповідними аналітичними розв'язками задачі теорії повзучості з пошкодженням матеріалу стержня при дії відцентрових сил.

Розглянемо математичну постановку задачі повзучості стержня з постійним перетином за умов дії відцентрових сил. Ця задача має практичне значення для розрахунків турбінних лопаток [4], розрахункова схема яких наведена на рис. 1.

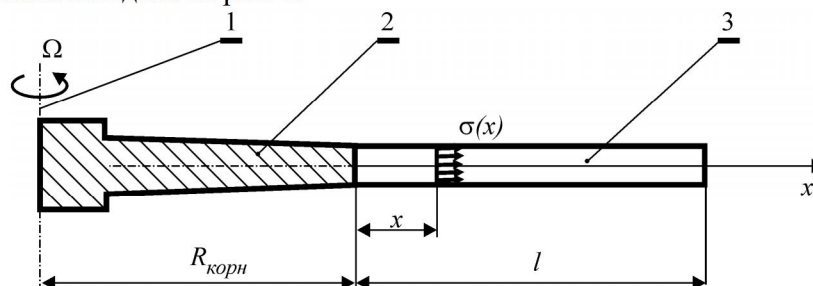


Рис. 1. Розрахункова схема лопатки турбіни:  
1 – вісь обертання ротора турбіни; 2 – диск турбіни; 3 – лопатка турбіни

У подальшому стержень вважаємо жорстко закріпленим у диску радіусом  $R_{\text{корн}}$ , який обертається з кутовою швидкістю  $\Omega$ . Позначимо координату точки осі стержня –  $x$ , довжину стержня приймаємо рівною  $l$ , густину та модуль пружності матеріалу відповідно  $\rho$  та  $E$ .

За відомими припущеннями теорії повзучості стержня із пошкодженням матеріалу задачу можна подати системою таких рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c + \frac{\sigma}{E}; u(t, 0) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -c\Pi^2(x + R_{\text{корн}}); y(l) = 0, \quad (2)$$

$$\dot{c} = \frac{B}{(1-\omega)^n} (\sigma)^n; c(0, x) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\omega} = \frac{A}{(1-\omega)^k} (\sigma)^k; \omega(0, x) = 0, \quad (4)$$

де  $u = u(t, x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  – осьові переміщення точок та напруження у перетинах стержня;  $c = c(t, x)$ ,  $\omega = \omega(t, x)$  – осьова деформація повзучості та параметр пошкоджуваності в точках перетинів стержня;  $B$ ,  $n$ ,  $A$ ,  $k$  – сталі матеріалу, що визначають за кривими повзучості та тривалої міцності до руйнування.

За рівнянням (2) легко встановити, що напруження в перетині стержня є сталим у часі та визначається відцентровими силами:

$$y(x) = \frac{c\Pi^2}{2} \left( l^2 + 2R_{\text{корн}}(l-x) - x^2 \right), \quad (5)$$

де максимальне напруження має місце при  $x = 0$ .

Урахувавши незалежність напружень від часу, шляхом інтегрування рівняння (4) одержуємо

$$\omega(t, x) = 1 - e^{\frac{1}{k+1} \ln[1 - (k+1) \cdot A \cdot \sigma^k(x) \cdot t]} \quad (6)$$

Звідси за умови  $\omega = 1$  можна знайти час до руйнування:

$$T = \frac{1}{(k+1) \cdot A \cdot \sigma^k(0)}. \quad (7)$$

Далі інтегруванням рівнянь (3) і (4) визначаємо деформацію повзучості:

$$c(t, x) = \frac{B}{A} \frac{\sigma^{n-k}(x)}{k-n+1} \left( 1 - (1 - \omega(t, x))^{k-n+1} \right). \quad (8)$$

Наприкінці з рівняння (1) одержуємо рівняння для підрахунку зміни у часі переміщень точки стержня  $x$ :

$$u(t, x) = \int_0^x \left( c(t, \xi) + \frac{\sigma(\xi)}{E} \right) d\xi \quad (9)$$

Таким чином, розглянута задача розв'язана в аналітичній формі (5) – (9). Підрахунок за формулою (9) можна здійснити чисельними методами, що не є складним при існуючих комп'ютерних технологіях. У подальшому використовуємо аналітичний розв'язок (5) – (9) задачі теорії повзучості із пошкодженням матеріалу стержня при дії відцентрових сил для порівняння з відповідним розв'язком системи рівнянь (1) – (4), одержаним за методом Бубнова–Гальоркіна.

Побудову наближених розв'язків системи рівнянь (1) – (4) за методом Бубнова–Гальоркіна розглянемо за схемою, яку надано в роботі [3]. Для цього рівняння задачі запишемо в операторній формі:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{f}_\Gamma, \\ \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{f}_\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\Gamma 1} \\ \mathbf{f}_{\Gamma 2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

де  $\mathbf{v}$  – вектор, що містить невідомі задачі; матричні оператори  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$  та вектор  $\mathbf{f}_\Gamma$  побудовано за виглядом рівнянь задачі.



Невідомі задачі подамо у вигляді апроксимацій, які тотожно задовольняють граничним умовам задачі:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_n(t, \mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Pi}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_n(t), \\ \mathbf{v}_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{n1} \\ \mathbf{v}_{n2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1 \\ \tilde{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{n1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_{n2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \mathbf{a}_n(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{n1}(t) \\ \mathbf{a}_{n2}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  – заданий вектор;  $\mathbf{\Pi}_n(\mathbf{x})$  – матриця, що складена з векторів пробних функцій;  $\mathbf{a}_n(t)$  – вектор, який складено з невідомих функцій часу.

За методом Бубнова–Гальоркіна розглядаємо умову ортогональності відхилу:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{\Pi}_n^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_n - \mathbf{f}_{\Gamma})) d\Gamma = 0 \quad (12)$$

З умови (12) з урахуванням виразів (10) та (11) одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{n2} &= \mathbf{K}_{n22}^{-1} \cdot (\mathbf{b}_{n2} - \mathbf{K}_{n21} \cdot \mathbf{a}_{n1}), \\ \dot{\mathbf{a}}_{n1} &= \mathbf{M}_{n11}^{-1} \cdot \mathbf{b}_{n1}(\mathbf{a}_{n1}, \mathbf{K}_{n22}^{-1} \cdot (\mathbf{b}_{n2} - \mathbf{K}_{n21} \cdot \mathbf{a}_{n1})), \\ \mathbf{a}_{n1}(0) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Сукупність співвідношень (13) містить систему лінійних алгебраїчних рівнянь та диференціальних рівнянь у формі Коші відносно невідомих функцій часу, які відповідають апроксимації (11) та за якими у заданий час невідомі визначаються в заданій точці стержня.

Співвідношення (10)–(13) можна використати для розв’язання задачі (1) – (4), якщо прийняти відповідні оператори у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \omega \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \sigma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{EF} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{f}_{\Gamma 1} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{B}}{(1-\omega)^n} \sigma^n \\ \frac{\mathbf{A}}{(1-\omega)^k} \sigma^k \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_{\Gamma 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \Omega^2 (x_{\text{корн}}^{\mathbf{D}_{\text{корн}}}, \mathbf{D}_{\text{корн}}) \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{n1} \\ \mathbf{v}_{n2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_{n1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{n2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{n1} \\ \mathbf{a}_{n2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Pi}_{n1} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(c)} & \dots & \Psi_{n_c}^{(c)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_1^{(\omega)} & \dots & \Psi_{n_{\omega}}^{(\omega)} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{\Pi}_{n2} &= \begin{pmatrix} \frac{x}{l} \Psi_1^{(u)} & \dots & \frac{x}{l} \Psi_{n_u}^{(u)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \Psi_1^{(\sigma)} & \dots & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \Psi_{n_{\sigma}}^{(\sigma)} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{a}_{n1}^T &= \left( \mathbf{a}_1^{(c)} \quad \mathbf{a}_2^{(c)} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n_c}^{(c)} \quad \mathbf{a}_1^{(\omega)} \quad \mathbf{a}_2^{(\omega)} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n_{\omega}}^{(\omega)} \right); \\ \mathbf{a}_{n2}^T &= \left( \mathbf{a}_1^{(u)} \quad \mathbf{a}_2^{(u)} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n_u}^{(u)} \quad \mathbf{a}_1^{(\sigma)} \quad \mathbf{a}_2^{(\sigma)} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n_{\sigma}}^{(\sigma)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Розглянемо результати розв’язання задачі (1) – (4) за схемою (10) – (15) для вихідних даних, які відповідають робочим лопаткам газових турбін [5], що виконані зі сплаву ЭИ929 з густиною

$$\rho = 8400 \text{ кг/м}^3, \text{ модулем пружності } E = 166 \text{ ГПа [6] при } R_{\text{корн}} = 0,58 \text{ м; } l = 0,085 \text{ м; } \Omega = \frac{440}{3} \text{ рс}^{-1}.$$

Сталі закону повзучості визначені за даними повзучості та тривалої міцності [6]:

$$\left. \begin{aligned} n &= 8,004; \quad \mathbf{B} = 3,826 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-n} / \text{ год}; \\ k &= 4,169; \quad \mathbf{A} = 3,604 \cdot 10^{-13} \text{ МПа}^{-k} / \text{ год}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для аналізу впливу точності обчислень та вигляду апроксимацій невідомих задач повзучості із пошкодженням матеріалу на похибки наближених розв'язків виконано розрахунки при різних кількостях пробних функцій  $n = n_c = n_\omega = n_\sigma = n_u = 1, 2 \dots 125$  та при різному числі  $N_g$  вузлів квадратурних формул Гауса, за якими обчислювалися інтеграли (12) у співвідношеннях (15); розв'язання задачі Коші (13) виконувалося методом Рунге–Кутта–Мерсенна з автоматичним вибором кроку [7]. За допомогою розрахунків для різного числа  $n$  пробних функцій одержані значення часу –  $T_n$ , для якого параметр пошкодження приймає значення  $\omega \approx 1$ . Дані надані в табл. 1, за аналізом яких можна встановити, що наближені обчислення збільшують значення часу до руйнування порівняно з  $T = 3139,55$  год, що встановлено за аналітичною формулою (7).

Т а б л и ц я 1

*Час до руйнування за умовою, коли  $\omega \approx 1$*

Параметри апроксимацій ( $n$ ) та точності обчислень ( $N_g$ )	$T_n$	$\frac{T_n}{T}$	$\omega$
$n = 10, N_g = 48$	3228,97	1,024482	0,999192
$n = 25, N_g = 48$	3161,28	1,006921	0,996085
$n = 125, N_g = 480$	3141,65	1,000669	0,991874

Умова  $T_n > T$ , якій задовольняють усі одержані значення для часу руйнування, не дозволяє порівняти відповідні розв'язки з аналітичним розв'язком через його відсутність при  $t > T$ . За цих умов доцільно порівняти наближені та аналітичні розв'язки (табл. 2), що відповідають часу:

$$T_n^* = \max \{t_i \leq T\}_{i=1}^{N_m}, \quad (17)$$

де  $t_i$  – значення часу, відповідні крокам інтегрування у часі за методом Рунге–Кутта–Мерсенна;  $N_m$  – кількість кроків інтегрування.

Т а б л и ц я 2

*Час до руйнування за умовою, коли  $t = T_n^*$*

Параметри апроксимацій ( $n$ ) та точності обчислень ( $N_g$ )	$T_n^*$	$\frac{T_n^*}{T}$	$\omega$
$n = 10, N_g = 48$	3131,25	0,997356	0,538154
$n = 25, N_g = 48$	3131,25	0,997356	0,640319
$n = 125, N_g = 480$	3139,45	0,999968	0,792739

На рис. 2 – 4 подані наближені розв'язки (криві) для розподілів деформації повзучості у різні моменти часу та аналітичні дані (маркери).

Наведені дані свідчать, що результати, одержані при значеннях часу  $t = T_n^*$ , мають значно більшу похибку відповідно до аналітичного розв'язку, ніж результати, що одержані при  $t < T_n^*$ . Аналогічні якісні властивості похибок наближених розв'язків одержані також для параметру пошкодження  $\omega$  та переміщення  $u$ . Це можна пояснити тим, що крок інтегрування у часі за методом Рунге–Кутта–Мерсенна змінюється, тоді як кількість пробних функцій залишається сталою, та при досягненні параметром пошкодження значення  $\omega \geq 0,5 - 0,7$ , коли крок інтегрування за часом значно зменшується, кількість пробних функцій не відповідає необхідній для одержання якісних за похибкою наближених розв'язків. Наближені розв'язки, одержані при  $\omega \geq 0,5 - 0,7$  (табл. 2), слід вважати потенційно менш точними. Наближені розв'язки, які відповідають моментам часу  $t = T_n^*$ , з прийнятною точністю, принципово можна отримати за рахунок суттєвого збільшення з 10 до 125 кількості  $n$  пробних функцій та збільшення з 48 до 480 кількості вузлів квадратурних формул. Разом з тим одержання таких розв'язків за умов суттєвого збільшення обсягів розрахунків при незначному уточненні часу руйнування (табл. 1 та 2) є недоцільним.



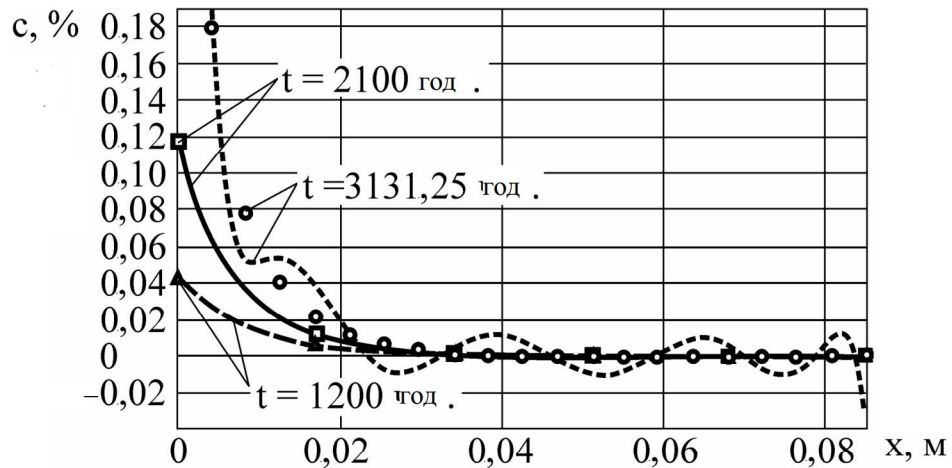


Рис. 2. Деформації повзучості, одержані при  $n = 10, N_g = 48$

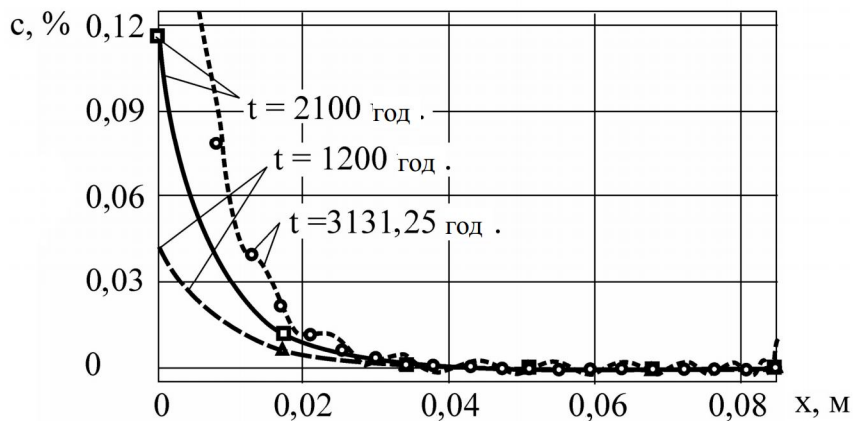


Рис. 3. Деформації повзучості, одержані при  $n = 25, N_g = 48$

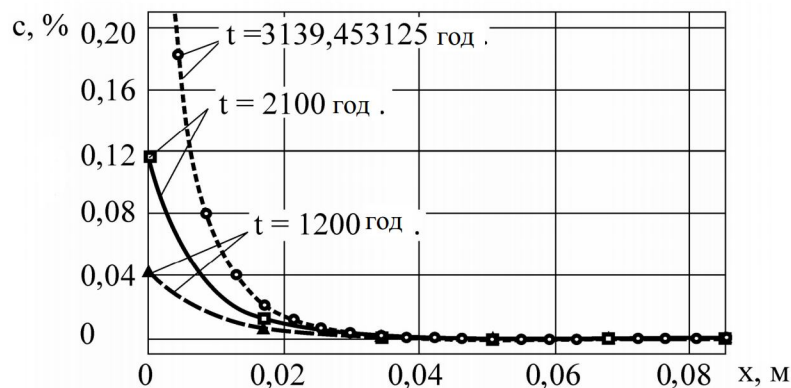


Рис. 4. Деформації повзучості, одержані при  $n = 125, N_g = 480$

**Висновки.** У роботі досліджено вплив точності обчислень та вигляду апроксимацій невідомих задач повзучості із пошкодженням матеріалу на похибки наближених розв'язків, які одержують зведенням до звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій часу за методом Бубнова-Гальборкіна. Встановлено необхідність суттєвого збільшення пробних функцій просторових координат та точності обчислень для забезпечення точності одержуваних наближених розв'язків, що відповідають близьким до одиниці значенням параметру пошкоджуваності. Можна рекомендувати при розв'язанні задач повзучості із пошкодженням матеріалу обмежуватися розглядом розв'язків, що відповідають параметру

пошкодження  $\omega \leq 0,5 - 0,7$ . У подальшому рекомендується використовувати одержані результати при розв'язанні прикладних задач повзучості із пошкодженням матеріалів.

#### **Список використаних джерел**

1. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный, В.В. Бортовой и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 262 с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. Морачковский О.К. Решение начально-краевых задач теории ползучести повреждающихся тел методом Бубнова – Галеркина / О.К. Морачковский, Ю.В. Ромашов // Теоретическая и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 23 – 28.
4. Левин А.В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин / А.В. Левин. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1953. – 624 с.
5. Манушин Э.А. Газовые турбины: проблемы и перспективы / Э.А. Манушин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 168 с.
6. Масленков С.Б. Жаропрочные стали и сплавы / С.Б. Масленков. – М.: Металлургия, 1983. – 192 с.
7. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин: пер. с англ. / Дж. Н. Ланс. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.

*Стаття надійшла до редакції 17.01.2008 р.*