

УДК 681.518



В. А. Сало



В. П. Раківненко



В. М. Нечипоренко

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СФЕРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Пропонованим RVR-методом вирішена просторова задача про напружено-деформований стан ортотропної сферичної оболонки під дією статичного локального навантаження. У методі використані варіаційний принцип Рейсснера, теорія R-функцій, загальні рівняння тривимірної теорії пружності, метод І. М. Векуа і алгоритм двостороннього оцінювання точності наближених розв'язків варіаційних задач. Ефективність RVR-методу показана на чисельних прикладах.*

*К л ю ч о в і с л о в а: варіаційний принцип Рейсснера, теорія R-функцій, тривимірна теорія пружності, напружено-деформований стан, статичне локальне навантаження, сферична пружна оболонка.*

**Постановка проблеми.** У розрахунковій інженерній практиці в розв'язуванні складних крайових задач для пружних конструкцій все більша увага приділяється змішаним варіаційним постановкам, які позбавлені властивих для класичних функціоналів Лагранжа  $I_L$  і Кастільяно  $I_C$  відомих недоліків та будуються, головним чином, на основі функціонала Рейсснера  $I_R$  (при незалежній апроксимації вектора переміщення  $\mathbf{u}$  та тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Чисельній реалізації таких постановок істотно заважали труднощі в оцінюванні точності розв'язків, спричинені відсутністю екстремуму в точці стаціонарності  $I_R$ . У вирішенні цієї проблеми становлять науковий інтерес обґрунтування застосування методу Рітца для неекстремального функціонала  $I_R$  та оцінювання достовірності наближених розв'язків крайових задач пружних оболонок [1–3]. Оскільки вирішення таких задач пов'язане зі значними обчислювальними труднощами, до сьогодні зберігає свою актуальність проблема створення в рамках просторової постановки надійних, достатньо універсальних і алгоритмічно простих методів розрахунку оболонкових елементів конструкцій із сучасних матеріалів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У сучасній техніці пружні оболонки з отворами є одними з найбільш відповідальних конструктивних елементів, від міцності і жорсткості яких залежить працездатність і надійність конструкції в цілому. Огляд, аналіз та класифікація існуючих в науковій літературі, нерідко суперечних один одному, варіантів уточнених теорій оболонок дано у монографії [1], в якій запропоновано теоретично обґрунтований та чисельно реалізований RVR-метод розв'язання просторових крайових задач визначення напружено-деформованого стану статично навантажених ортотропних оболонок з отворами довільних форм і розмірів.

Чисельно-аналітичний RVR-метод заснований на використанні варіаційного принципу Рейсснера [4], загальних рівнянь просторової теорії пружності, методу І. М. Векуа [5] (розкладання шуканих функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра від товщинної координати), алгоритму двостороннього оцінювання точності наближених розв'язків змішаних варіаційних задач [3] і математичного апарату теорії R-функцій [6], за допомогою яких на аналітичному рівні враховується геометрична інформація крайових задач і будуються структури розв'язків, що точно задовольняють всі граничні умови. Це дослідження є логічним продовженням наукової роботи [7].

**Мета статті** полягає у дослідженні напружено-деформованого стану в статично навантажених сферичних елементах пружних конструкцій за допомогою ефективного використання запропонованого RVR-методу.

**Постановка задачі.** Розглянемо розрахунок міцності і жорсткості послабленої двома полюсними круговими отворами радіуса  $r_0$  ортотропної сферичної оболонки (рис. 1), що знаходиться під дією локального внутрішнього тиску  $t_3^- = -q_0 \sin^5[\pi(\vartheta + 1)/2]$ . Положення довільної точки в досліджуваній оболонці, товщина якої  $h$ , визначаємо введеними в її серединній поверхні  $\Omega_s$  радіуса  $R$  криволінійними ортогональними координатами  $\theta$ ,  $\varphi$  та  $Z$  (лінії головної кривини оболонки – її меридіани і паралелі). Тут  $\theta$  – кут між нормаллю до  $\Omega_s$  і віссю обертання;  $\varphi$  – кут між фіксованою і тою, що проходить через розглянуту точку  $M$ , меридіанними площинами (рис. 1);  $Z$  – відстань уздовж нормалі до серединної поверхні  $\Omega_s$  ( $-h/2 \leq Z \leq h/2$ ). Поверхня  $\Gamma$  оболонки складається з бічних поверхонь двох полюсних отворів  $\Gamma_s$  ( $\theta = \theta_s$ ,  $s = 1, 2$ ) і двох лицьових поверхонь  $\Gamma^\pm$  ( $Z = \pm h/2$ ), рівняння яких задаються функціями (при  $\zeta = 2Z/h$ ):

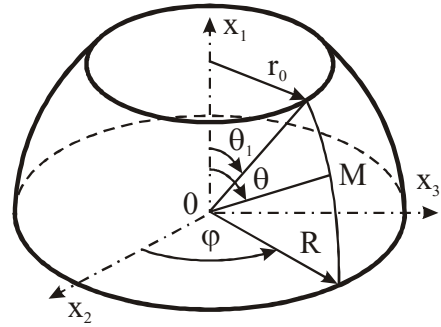


Рис. 1. Сферична оболонка

$$\omega_1 = \theta^2/\theta_1^2 - 1; \quad \omega_2 = 1 - \theta^2/\theta_2^2; \quad \omega_\pm = 1 m\zeta. \quad (1)$$

Нехай  $\theta_0 = \pi/2$  – кут, що визначає площину, відносно якої полюсні отвори симетричні. Помістимо на лінії перетинання серединної поверхні  $\Omega_s$  із площиною  $\theta_0 = \pi/2$  початок безрозмірної координати  $\vartheta = (\theta - \theta_0)/(\theta_0 - \theta_1)$ . Інтервал значень  $\vartheta$  визначається виразом  $|\vartheta| \leq 1$  при зміні кута  $\theta$  від  $\theta = \theta_1$  до  $\theta = \theta_2$  (рівняння бічних поверхонь першого і другого кругових отворів відповідно). У силу вісесиметричного навантаження оболонки і симетричного (відносно площини  $\theta = \theta_0$ ) розташування отворів  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$  і  $\sigma_{23} = 0$ , тому граничні умови на лицьових поверхнях оболонки:

$$\Gamma^+ : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0; \quad \Gamma^- : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = t_3^-. \quad (2)$$

На бічних поверхнях  $\Gamma_s$  ( $s = 1, 2$ ) отворів розглянемо найпоширеніші чотири типи однорідних граничних умов:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{13} = 0; & \text{b) } \sigma_{11} = 0, \quad u_3 = 0; \\ \text{c) } u_1 = 0; \quad \sigma_{13} = 0, & \text{d) } u_1 = 0, \quad u_3 = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Відзначимо, що граничні умови (3, а) відповідають вільному краю, (3, б) – краю з абсолютно жорсткою у своїй поверхні діафрагмою, (3, с) – ковзному краю, (3, д) – абсолютно жорсткому краю (защемленню).

Варіаційне рівняння Рейсснера (при  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$  та  $\sigma_{23} = 0$ ) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left\{ - \left[ \frac{1}{R\chi} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \operatorname{ctg} \theta + \sigma_{13} \right] + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{13}}{\partial z} \right] \delta u_1 - \right. \\
 & \quad - \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} + \sigma_{13} \operatorname{ctg} \theta - \sigma_{11} - \sigma_{22} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{33}}{\partial z} \right] \delta u_3 + \\
 & \quad + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_3 \right) - \frac{1}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{11} + \\
 & \quad + \left[ \frac{1}{R\chi} (u_1 \operatorname{ctg} \theta + u_3) - \frac{1}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{22} + \\
 & \quad + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{22} \right] \delta \sigma_{33} + \\
 & \quad \left. + \left[ \frac{1}{R\chi} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_1 \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13} \right] \delta \sigma_{13} \right\} 2\pi R^2 \chi^2 \sin \theta d\theta dz = 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

де  $E_1, E_2, E_3$  і  $G_{13}$  – модулі пружності і зсуву;  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  – коефіцієнти Пуассона.

Зауважимо, що контурні інтеграли, які містять у собі статичні і геометричні граничні умови, відсутні в рівнянні (4), оскільки при використанні запропонованого RVR-методу структури розв'язків точно задовольняють усі граничні умови досліджуваних крайових задач.

**Структури розв'язків крайових задач.** У неекстремальному змішаному функціоналі Рейсснера  $\mathbf{I}_R$  незалежні між собою шукані компоненти переміщень  $u_i$  і напружень  $\sigma_{ij}$  подамо рядами:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{k=0}^{l_1-1} (1-b_{1k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_1} a_1^{n_1} S(\vartheta) P_k(\zeta); \\
 u_3 &= \sum_{k=0}^{l_3-1} (1-b_{3k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_3} a_3^{n_3} C(\vartheta) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{11} &= \sum_{k=0}^{l_{11}-1} [1-(1-b_{1k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{11}} a_{11}^{n_{11}} C(\vartheta) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{22} &= \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} a_{22}^{n_{22}} C(\vartheta) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{13} &= \omega_{\zeta} \sum_{k=0}^{l_{13}-1} [1-(1-b_{3k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{13}} a_{13}^{n_{13}} S(\vartheta) P_k(\zeta); \\
 \chi^2 \sigma_{33} &= \frac{t_3^-}{2} (1-\zeta) \left( 1 - \frac{h}{2R} \right)^2 + \omega_{\zeta} \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} a_{33}^{n_{33}} C(\vartheta) P_k(\zeta),
 \end{aligned} \tag{5}$$

де  $n_i = k(m_i + 1) + p + 1$  ( $n_i \Rightarrow n_{ij}$ );  $a_i^{n_i}$ ,  $a_{ij}^{n_{ij}}$  – шукані сталі;  $C(\vartheta)$  і  $S(\vartheta)$  – парна і непарна апроксимуючі функції координати  $\vartheta$ ;  $P_k(\zeta)$  – поліноми Лежандра;  $\chi = 1 + h\zeta / 2R$ ;  $\omega_\zeta = 1 - \zeta^2$ .

Сталі величини  $b_{1k}$  і  $b_{3k}$  у виразах (5) необхідні для того, щоб у кожному математичному записі граничних умов на бічних поверхнях  $\Gamma_s$  оболонки не зустрічалися взаємно відповідні величини із шуканих переміщень і напружень. Іншими словами, компоненти вектора переміщення і тензора напружень, які задаються граничними умовами, не повинні бути енергетично відповідними [8]. Отже, величини  $b_{1k}$  та  $b_{3k}$  набувають значення одиниці (якщо задане переміщення) або нуля (якщо задане напруження), тому граничним умовам (3, a), (3, b), (3, c) і (3, d) відповідають комбінації значень  $(b_{1k} = 0, b_{3k} = 0)$ ;  $(b_{1k} = 0, b_{3k} = 1)$ ;  $(b_{1k} = 1, b_{3k} = 0)$  та  $(b_{1k} = 1, b_{3k} = 1)$ .

Згідно з монографією [1] конкретна модель оболонки визначається заданням чисел  $l_i, l_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) в апроксимаціях компонентів вектора переміщення  $\mathbf{u}$  і тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$  по товщині оболонки. Отже, вибрана модель відповідає (при  $i, j = \overline{1, 2}$ ) комбінації величин  $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$ , де  $l_i$  – кількість утримуваних членів у розкладанні по поперечній координаті  $\zeta$  дотичних переміщень  $u_i$ ;  $l_3$  – нормального переміщення  $u_3$ ;  $l_{ij}$  – тангенціальних напружень  $\sigma_{ij}$ ;  $l_{i3}$  – поперечних дотичних напружень  $\sigma_{i3}$  та  $l_{33}$  – поперечного нормального напруження  $\sigma_{33}$ . Задання комбінації параметрів  $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$  дозволяє в програмі автоматично переходити до різних уточнених двовимірних моделей оболонки і може бути покладене в основу створення послідовної і логічно стрункої класифікації (за ступенем порядку наближень) існуючих у науковій літературі моделей уточнених теорій оболонок. Наприклад, варіанту (2,1, 2,1, 0) відповідає теорія оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю типу Тимошенка; варіантам (2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 4, 2, 1) та (4, 3, 4, 3, 2) – прикладні теорії оболонок [9], [10] та [11].

**Чисельна реалізація сформульованої задачі.** Розглянемо навантажений локальним внутрішнім тиском  $t_3^- = -q_0 \sin^5 [\pi(\vartheta + 1)/2]$  ортотропний сферичний пояс середньої товщини ( $h/R = 0.2$ ) із геометричними і фізичними параметрами (за різних величин співвідношення  $E_2/E_1$ ):

$$\left. \begin{aligned} R = 0.6 \text{ м}; \quad \theta_1 = \pi/4; \quad \theta_2 = 3\pi/4; \quad q_0 = 1 \text{ МПа}; \\ E_1 = E_3 = 20 E_0; \quad G_{13} = E_0; \quad \nu_{ij} = 0.3; \quad E_0 = 1 \text{ ГПа}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уведемо величини зведених переміщень  $\bar{u}_r$  та напружень  $\bar{\sigma}_{r\theta}$  у точках серединної поверхні  $\Omega_s$  (при  $\zeta = 0$ ) і лицьових поверхонь  $\Gamma^\pm$  (при  $\zeta = \pm 1$ ):

$$\alpha_{\rho}^0 = \frac{u_i^0 E}{q_0 R}; \quad \beta_{ij}^0 = \frac{\sigma_{ij}^0}{q_0} \quad \text{òà} \quad \alpha_{\rho}^+ = \frac{u_i^+ E}{q_0 R}; \quad \beta_{ij}^+ = \frac{\sigma_{ij}^+}{q_0}; \quad \alpha_{\rho}^- = \frac{u_i^- E}{q_0 R}; \quad \beta_{ij}^- = \frac{\sigma_{ij}^-}{q_0}. \quad (7)$$

Після підстановки запропонованої структури розв'язку (5) у варіаційне рівняння Рейсснера (4) і чисельного інтегрування відповідних потрійних інтегралів досліджувана крайова задача зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо шуканих сталих  $a_i^{n_i}$  і  $a_{ij}^{n_{ij}}$ , за значеннями яких визначаються всі характеристики напружено-деформованого стану розрахункової оболонки.

У таблиці подані в точках серединної поверхні  $\Omega_s$  (перетин  $\vartheta = 0$ ) значення зведених напружень  $\beta_{\rho 1}^0$ ,  $\beta_{22}^0$  і переміщення  $\alpha_{\vartheta}^0$  (7) для трансверсально-ізотропної (при  $E_2 = E_1$ ) сферичної оболонки. Чисельні результати отримані на основі застосування зсувних моделей (2,1,2,1,0), (2, 2, 2, 2,1), (4, 2, 4, 2, 1), (4, 3, 4, 3, 2) та (5, 5, 5, 5, 5). При цьому в чотирьох рядках таблиці для кожної шуканої величини подані результати, які відповідають різним граничним умовам на бічних поверхнях отворів: вільному краю (3, а), краю з абсолютно жорсткою у своїй поверхні діафрагмою (3, б), ковзному краю (3, с) і абсолютно жорсткому краю (защемленню) (3, d).

Значення шуканих величин для різних граничних умов (3)

Шукана величина	Зсувна модель ( $l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33}$ )				
	(2,1,2,1,0)	(2, 2, 2, 2,1)	(4, 2, 4, 2,1)	(4, 3, 4, 3, 2)	(5, 5, 5, 5, 5)
$\alpha_{\vartheta}^0$	14.67	14.85	14.85	14.80	14.79
	13.74	13.85	13.85	13.77	13.76
	11.39	11.53	11.53	11.46	11.45
	10.52	10.61	10.61	10.51	10.49
$\beta_{\rho 1}^0$	0.169	0.169	0.167	0.165	0.158
	0.262	0.260	0.259	0.258	0.254
	0.611	0.611	0.609	0.606	0.597
	0.752	0.745	0.744	0.743	0.736
$\beta_{22}^0$	2.889	2.876	2.869	2.859	2.855
	2.720	2.708	2.703	2.688	2.684
	2.336	2.347	2.341	2.328	2.324
	2.209	2.206	2.201	2.182	2.177

На рис. 2 і 3 показані графіки розподілу наведених переміщень і напружень, що обчислюються за формулами (7). Цифрами 1, 2, 3 і 4 на рис. 2 позначені графіки для різних варіантів граничних умов на бічних поверхнях отворів: відповідно для (3, а), (3, б), (3, с) та (3, d). Числа при графіках на рис. 3 відповідають значенням співвідношення  $E_2/E_1$ , яке характеризує ступінь ортотропії матеріалу сферичної оболонки.

Подані в таблиці та на рис. 2 і 3 числові і графічні результати дають достатньо повне уявлення про напружено-деформований стан досліджуваної оболонки, про ступінь збіжності чисельних розв'язків залежно від використання більш точної зсувної моделі оболонки, а також про залежність значень шуканих характеристик від способу закріплення отворів, від величини розміру отвору та від ступеня анізотропії матеріалу оболонки.

З отриманих результатів випливає, що серед уточнених теорій другого наближення прикладна теорія [9] дає кращі результати, ніж теорія Тимошенка, які практично збігаються з результатами менш послідовної з погляду на математичну коректність теорії четвертого наближення [10].

Найбільш точні результати можна одержати у випадку застосування більш складної зсувної моделі (4, 3, 4, 3, 2) прикладної теорії оболонок четвертого наближення [11].

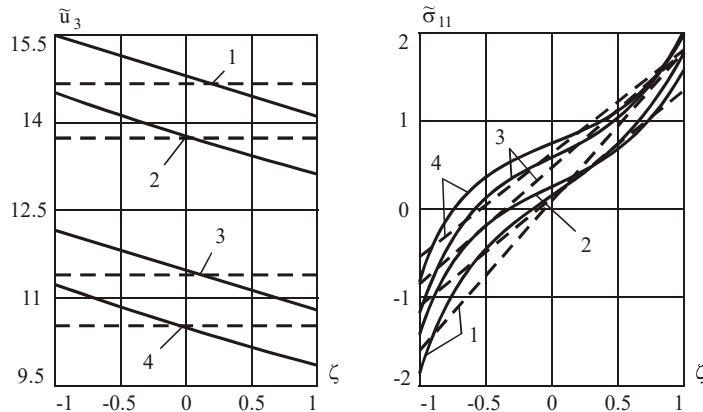
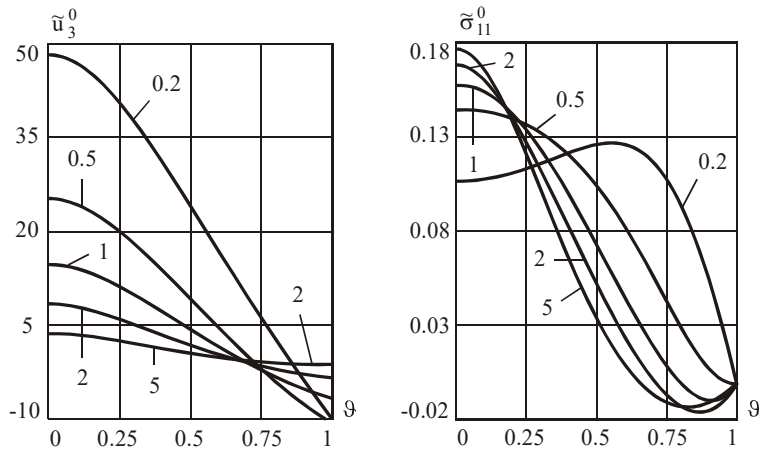
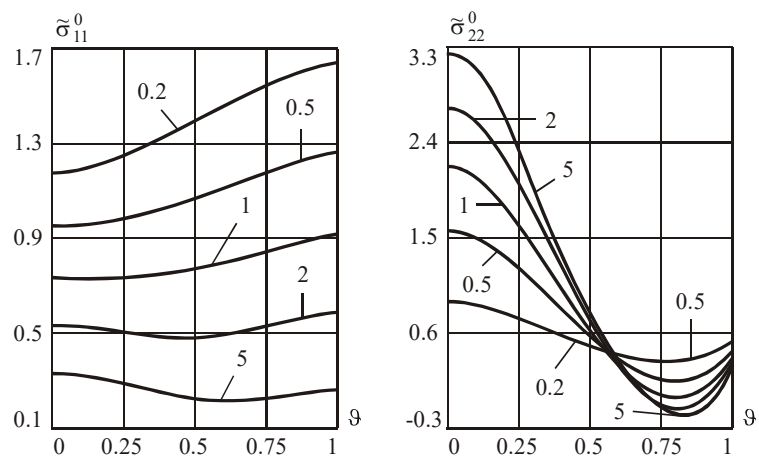


Рис. 2. Розподіл значень переміщення  $u_3$  та напруження  $\tilde{\sigma}_{11}$  уздовж товщини залежно від способу закріплення отворів (3) у перетині  $\vartheta = 0$



а



б

Рис. 3. Розподіл значень переміщення  $u_3^0$  та напружень  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  уздовж меридіана залежно від величини співвідношення модулів пружності  $E_2/E_1$ : а – умова (3, а); б – умова (3, д)

## Висновки

У статті на базі принципу Рейсснера сформульована варіаційна постановка тривимірних крайових задач статичної пружності оболонок, на товщину яких не накладено ніяких обмежень; подано аналітичний вираз змішаного варіаційного рівняння Рейсснера для досліджуваної оболонки і структури розв'язків, що точно задовольняють усім варіантам граничних умов сформульованої крайової задачі для локально навантаженої ортотропної сферичної оболонки з двома полюсними отворами.

За допомогою RVR-методу проведено оцінювання збіжності чисельних результатів, досліджений вплив товщини, ступеня анізотропії матеріалу, локального вигляду статичного навантаження і різних граничних умов на напружено-деформований стан оболонок. Подані нові наукові результати підтверджують можливість ефективного використання RVR-методу для розв'язування тривимірних крайових задач в інженерних розрахунках відповідальних оболонкових елементів пружних конструкцій, що використовуються у різних галузях сучасної техніки.

## Список використаних джерел

1. Сало, В. А. Краевые задачи статичности оболочек с отверстиями [Текст] / В. А. Сало. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
2. Сало, В. А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера [Текст] / В. А. Сало // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков : ХГПУ, 2000. – Вып. 95. – С. 70–75.
3. Сало, В. А. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейсснера [Текст] / В. А. Сало // Доповіді НАН України. – Київ : НАН України, 2003. – № 1. – С. 53–57.
4. Reissner, E. On a variational theorem in elasticity [Текст] / E. Reissner // Journal of Mathematics and Physics. – 1950. – Vol. 29, № 2. – P. 90–95.
5. Векуа, И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины [Текст] / И. Н. Векуа // Труды ТМИ. – Тбилиси : ТМИ, 1965. – Т. 30. – С. 3–103.
6. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В. Л. Рвачев. – Киев : Наук. думка, 1982. – 566 с.
7. Сало, В. А. Дослідження міцності пружної циліндричної конструкції під дією локального навантаження [Текст] / В. А. Сало, В. М. Нечипоренко // Збірник наукових праць Національної академії Національної гвардії України. – Харків : НАНГУ, 2017. – Вип. 2. – С. 76–82.
8. Филин, А. П. Элементы теории оболочек [Текст] / А. П. Филин. – Ленинград : Стройиздат, 1987. – 384 с.
9. Григоренко, Я. М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [Текст] / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – Киев : Наук. думка, 1987. – 216 с.
10. Пикуль, В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела [Текст] / В. В. Пикуль. – Москва : Наука, 1989. – 221 с.
11. Родионова, В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек [Текст] / В. А. Родионова, Б. Ф. Титаев, К. Ф. Черных. – Санкт-Петербург : СПбГУ, 1996. – 278 с.

*Стаття надійшла до редакції 31.10.2018 р.*

УДК 539.3

В. А. Сало, В. П. Раківненко, В. Н. Нечипоренко

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
СФЕРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПОД  
ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ**

*Предлагаемым RVR-методом решена пространственная задача о напряженно-деформированном состоянии ортотропной сферической оболочки под действием статического локального нагружения. В методе использованы вариационный принцип Рейсснера, теория R-функций, общие уравнения трехмерной теории упругости, метод И.Н. Векуа и алгоритм двусторонней оценки точности приближенных решений вариационных задач. Эффективность RVR-метода показана на числовых примерах.*

*К л ю ч е в ы е с л о в а: вариационный принцип Рейсснера, теория R-функций, трехмерная теория упругости, напряженно-деформированное состояние, статическое локальное нагружение, сферическая упругая оболочка.*

UDC 539.3

V. A. Salo, V. P. Rakivnenko, V. M. Nechiporenko

**RESEARCH OF STRESS-STRAINED STATE OF SPHERICAL ELEMENTS OF THE  
STRUCTURES AFFECTED BY THE LOCAL LOADING**

*The work is devoted to the actual scientific and technical problem, which consists in creation of scientifically proved, universal and effective numerical–analytical RVR-method of computation three-dimensional stress-strained state statically loaded homogeneous and continuously non-uniform on thickness non–thin orthotropical shells with holes of any sizes and forms is solved.*

*On the basis of the mixed Reissner’s variational principle and the general equations of the theory of elasticity the variational statement of the spatial boundary problems of the statics orthotropical shells of any thickness is given. It is formulated and the sufficient test of convergence of Ritz’s method is proved when searching of a point of stationary non-extreme Reissner’s functional.*

*The posteriori two-sided estimation of exactitude of the approached solutions of the mixed variational problems is offered. New structures of solutions, which take into account the change of the metrics on thickness of the orthotropical shells and precisely satisfy to all boundary conditions of the studied problems, are created. The geometrical information of problems for the shells with holes of any form is taking into account analytically with help of the R-functions theory. The created method may be used when designing the responsible shell elements of the structures in different areas of the modern engineering.*

*In this work spatial problem about the stress-strained state of orthotropical spherical shell affected by the static local loading is solved by the suggested numerical–analytical RVR-method. The effectiveness of this method is clearly shown on numerous numerical examples of solving applied problems.*

*K e y w o r d s: Reissner’s variational principle, R-functions mathematical theory, three-dimensional theory of elasticity, stress-strained state, static local loading, spherical elastic shell.*

**Сало Валентин Андрійович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

ORCID 0000-0003-2533-0949



**Раківненко Валерія Павлівна** – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

ORCID 0000-0002-6136-6191

**Нечипоренко Володимир Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

ORCID 0000-0002-4727-7344