

УДК 629.014

С. А. Соколовський

ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХОМОЇ ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ

Розглянуто наближений інженерний метод визначення коливальних процесів для випадку динамічного навантаження рухомої цистерни з рідиною та оцінено її несучу спроможність за екстремальних умов руху.

Постановка проблеми. Цистерна з рідиною являє собою взаємозв'язану систему. У разі рівномірного руху коливання стінок цистерни спричинюють коливання рідини, яка, своєю чергою, впливає на стінки цистерни. При цьому до степенів вільності цистерни як твердого тіла додаються нові степені, що характеризують коливання рідини. Тому під дією тих самих зовнішніх навантажень динаміка руху цистерни з рідиною може суттєво відрізнятись від її руху як твердого тіла.

Наявність у цистерні рухомої рідини до гідродинамічного тиску додає гідростатичні явища, наслідком чого є поява додаткових силових факторів, напруження від яких складаються з напруженнями статичних навантажень і у результаті можуть перевищувати границю міцності матеріалу конструкції. Зазначена проблема стає ще більш актуальною для випадків екстремальних навантажень: розгін автомобіля з цистерною або подолання поодиноких перешкод, які зумовлені недоліками дорожнього покриття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій із зазначеної проблеми свідчить, що рух твердого тіла з порожнинами, які повністю заповнені рідиною, вперше досліджений М. Є. Жуковським [1]. Проте складність проблеми полягає, по-перше, у визначенні моделі системи “цистерна – рідина”, а по-друге, – у тому, що система з дискретними параметрами має нескінченний спектр частот і форм власних коливань.

Достатньо прості рішення поставленої задачі із задовільною точністю можливо отримати, якщо використати механічні моделі коливань рідини у баках. Із багатьох існуючих моделей найбільш фізично обґрунтованою є пружинно-масова модель ЦАГІ [3].

Метою статті є дослідження динамічних характеристик рухомої системи “цистерна – рухома рідина” у випадках її перевантаження і оцінювання при цьому несучої спроможності конструкції цистерни.

Виклад основного матеріалу. Вивчення коливань рідини в ємностях є однією із задач класичної гідродинаміки, де для визначення руху рідини застосовують змінні параметри Лагранжа або Ейлера [2].

Для дослідження динамічних процесів у цистерні з рідиною застосовано енергетичний метод Релея з урахуванням таких припущень:

- рідина цистерни ідеальна й нестислива;
- рух рідини в цистерні відбувається в потенціальному полі масових сил;
- у разі незбуреного руху цистерни поверхня рідини перпендикулярна вектору прискорення сили тяжіння \vec{G} .

Модель системи “цистерна – рухома рідина” будують таким чином: масу i -го елемента рідини ділять на дві частини – нерухому затверділу m_{zi} , що з'єднується із цистерною, та рухома m_{xi} , яка приєднана до стінок цистерни невагомою пружиною із жорсткістю c_i на відстані z_i від вільної поверхні. В'язке тертя, за допомогою якого враховуються демпфівальні властивості реальної рідини, моделюють демпфером в'язкого тертя з коефіцієнтом опору h_i , що встановлюють між масою m_{xi} та стінкою цистерни (див. рис. 1).

Параметри зазначеної пружинно-масової моделі системи відшукуються з рівнянь збуреного руху цистерни з рідиною. Значення m_{xi} рухомої (зведеної) i -ої маси рідини для n -го тону коливань ($n = 1, 2, 3, \dots$) знаходять за формулою

$$m_{xi} = \frac{\pi d^3}{4} \cdot \frac{\rho}{v_n(v_n^2 - 1)} \cdot \text{th}(\bar{v}_n), \quad (1)$$

де d – діаметр цистерни; ρ – густина рідини; \bar{v}_n – математична величина.

$$\bar{v}_n = v_n \cdot \frac{2H}{d},$$

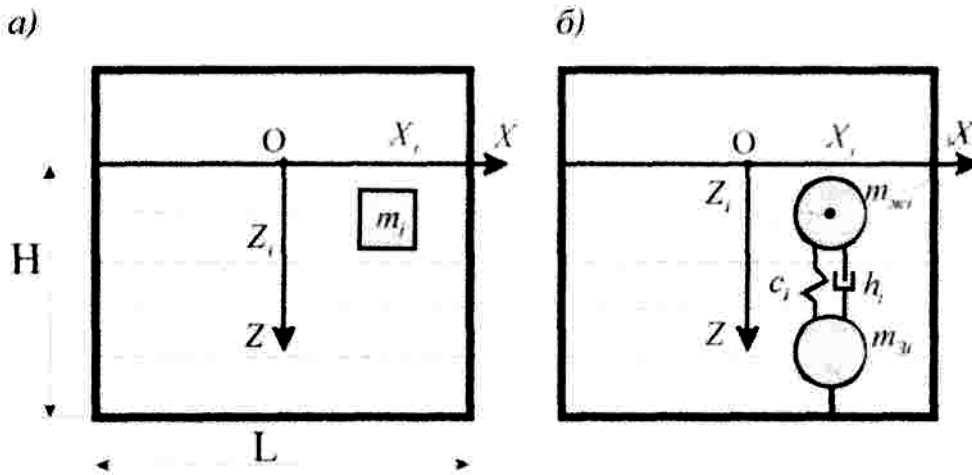


Рис. 1. Модель системи “цистерна – рухома рідина”

де H – висота стовпа рідини.

Значення v_n є коренями рівняння

$$\frac{\partial I_1(v_n)}{\partial v_n} = 0, \quad (2)$$

у якому I_1 – функція Бесселя 1-го роду.

Якщо $\frac{2H}{d} \geq 1$, то з достатньою точністю можна прийняти $\text{th}(v_n \frac{2H}{d}) = 1$. Тоді формула (1) набуває вигляду

$$m_{жсi} = \frac{\pi d^3}{4} \cdot \frac{\rho}{v_n(v_n^2 - 1)}.$$

Враховуючи, що маса всієї рідини для циліндричної цистерни дорівнює

$$m_i = \frac{\pi d^2}{4} \rho \cdot H,$$

знаходимо величину затверділої маси рідини

$$m_{зи} = m_i - m_{жсi}.$$

Значення частот вільних коливань рідини в цистерні обчислюють за виразом [3]:

$$\Omega_{жс} = \sqrt{\frac{2g n_x v_n}{d} \cdot \text{th}(\bar{v}_n)},$$

де n_x – коефіцієнт перевантаження.

Глибину розміщення зведених мас розраховують за формулою

$$z_i = \frac{d}{v_n} \text{th}(\bar{v}_n),$$

а жорсткість пружин c_i визначають із виразу

$$c_i = \frac{2g n_x v m_{жсi}}{d} \cdot \text{th}(\bar{v}_n).$$

Таким чином, для корпусу цистерни приймаємо балково-оболонкову модель, а для рідини – пружинно-масову модель (див. рис. 2).

До такої розрахункової схеми зводиться в загальному випадку задача про згинальні коливання корпусу цистерни з урахуванням наявності в ній рухомої рідини.

Вільні згинальні коливання балки, на якій у точці з координатою x на невагомій пружині з жорсткістю c_i закріплена зосереджена маса $m_{жсi}$, характеризуватимемо пружним переміщенням $z_n(x, t)$ балки для n -го тону.

На рис. 2 також зображені: $\xi_n(x_i, t)$ – пружне переміщення маси $m_{жсi}$ у точці з координатою x_i при коливанні балки для n -го тону; l_{0i} – початкова довжина пружного зв'язку.

Розв'язання задачі поділяється на два етапи: спочатку досліджують коливання зведених мас рідини,

потім визначають амплітудно-частотні характеристики пружної цистерни з рухомою рідиною.

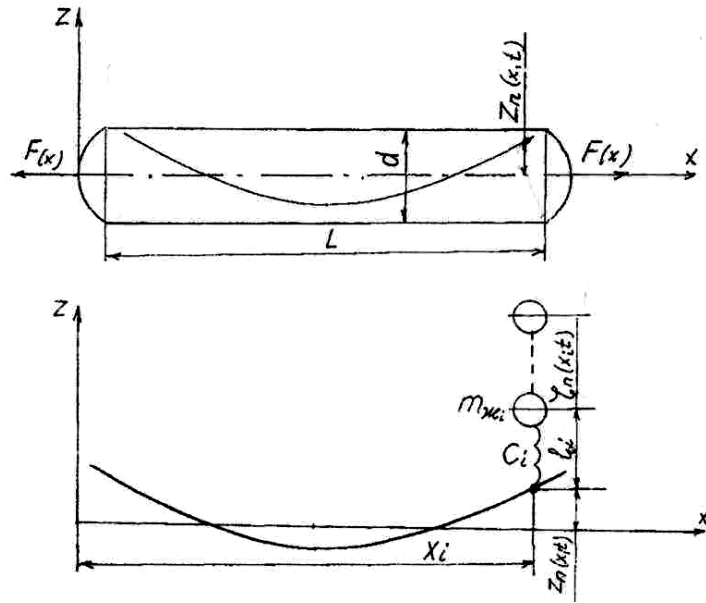


Рис. 2. Балково-оболонкова модель цистерни і пружинно-масова модель рідини

Для першого етапу спочатку запишемо вирази потенціальної та кінетичної енергій для суми зосереджених мас $m_{жci}$, які коливаються разом із пружною цистерною-балкою:

$$P_{жс} = \sum_{i=1} \frac{1}{2} c_i \xi_n^2(x_i, t), \quad (3)$$

$$K_{жс} = \sum_{i=1} \frac{1}{2} m_{жci} [\dot{z}_n(x_i, t) + \dot{\xi}_n(x_i, t)]^2. \quad (4)$$

Вважаючи процес коливання сталим, пружні переміщення запишемо у вигляді:

$$z_n(x_i, t) = Z_n(x_i) \cdot A_n \sin(\Omega_n t), \quad (5)$$

$$\xi_n(x_i, t) = \Psi_n(x_i) \cdot A_n \sin(\Omega_n t), \quad (6)$$

де $Z_n(x_i) \cdot \Psi_n(x_i)$ – функції форми згинальних коливань відповідної пружної балки та зведеної маси $m_{жci}$; A_n – амплітудне значення пружного згину; Ω_n – кругова частота власних згинальних коливань системи “цистерна – рідина”. Підставимо вирази (5) і (6) у формули (3) і (4):

$$P_{жс} = \sum_{i=1} \frac{1}{2} A_n^2 \sin^2(\Omega_n t) \sum_{i=1} \Psi_n^2(x_i) \cdot c_i,$$

$$K_{жс} = \frac{1}{2} A_n^2 \Omega_n^2 \cos^2(\Omega_n t) \sum_{i=1} m_{жci} [Z_n(x_i) + \Psi_n(x_i)]^2.$$

Максимальне значення енергії досягається за умов

$$\sin^2(\Omega_n t) = 1, \quad \cos^2(\Omega_n t) = 1. \quad (7)$$

Зрозуміло, що

$$P_{жс} = \frac{1}{2} A_n^2 \sum_{i=1} c_i \Psi_n^2(x_i), \quad (8)$$

$$K_{жс} = \frac{1}{2} A_n^2 \Omega_n^2 \sum_{i=1} m_{жci} [Z_n(x_i) + \Psi_n(x_i)]^2. \quad (9)$$

Надалі для розв’язання задачі доцільно виразити функцію $\Psi_n(x_i)$ через пружний згин цистерни-балки $Z_n(x_i)$.

Запишемо рівняння руху зведеної маси $m_{жci}$:

$$m_{\text{жсі}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [z_n(x_i, t) + l_{0i}(x_i) + \xi(x_i, t)] = -c_i \xi(x_i, t). \quad (10)$$

Підставимо у формулу (10) вирази (5) і (6). Скоротивши праву та ліву частини отриманого виразу на $A_n \sin(\Omega_n t)$, після нескладних перетворень матимемо:

$$\Psi_n(x_i) = \frac{m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2} \cdot Z_n(x_i). \quad (11)$$

З урахуванням (11) формули (8) і (9) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{жс}} &= \frac{1}{2} A_n^2 \sum_{i=1} Z_n(x_i) \cdot c_i \left(\frac{m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2} \right)^2, \\ K_{\text{жс}} &= \frac{1}{2} A_n^2 \Omega_n^2 \sum_{i=1} Z_n^2(x_i) \cdot m_{\text{жсі}} \left(1 + \frac{m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2} \right)^2. \end{aligned}$$

На другому етапі розрахунку розглянемо згинальні коливання корпусу цистерни з рідиною та прикладеною по вісі цистерни тяговою силою $F(x)$. Приймаємо такі припущення:

– цистерна має вигляд балки зі змінною за довжиною згинальною жорсткістю $EI(x)$ та погонними масами $m(x)$;

– рідина вважається затверділою, система в цілому розглядається як тверде тіло;

– коливання цистерни відбуваються в одній (вертикальній) площині.

Тоді формули для потенціальної та кінетичної енергій корпусу цистерни з рідиною матимуть вигляд:

$$\Pi_K = \frac{1}{2} \int_0^1 EI(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \pm \int_0^1 F(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (12)$$

$$K_k = \frac{1}{2} \int_0^1 m(x) \left[\frac{\partial^2 Z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (13)$$

де $F(x) > 0$ і $F(x) < 0$ – відповідно розтяжна або стискна осьова сила, що діє на цистерну.

Підставляючи вираз пружного згину (5) у формули (12) і (13) та використовуючи умови (7), отримаємо вирази для максимальних величин енергії

$$\begin{aligned} \Pi_{K \max} &= \frac{1}{2} A_n^2 \int_0^1 EI(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \pm A_n^2 \int_0^1 F(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \\ K_{k \max} &= \frac{1}{2} A_n^2 \Omega_n^2 \int_0^1 m(x) Z_n(x) dx. \end{aligned}$$

Знаходимо сумарне значення енергій:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \Pi_{k \max} + \Pi_{\text{жс} \max} = \\ &= \frac{1}{2} A_n^2 \left\{ \int_0^1 EI(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \pm A_n^2 \int_0^1 F(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \sum_{i=1} Z_n(x_i) \cdot c_i \left(\frac{m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2} \right)^2 \right\}, \\ K_{\max} &= K_{k \max} + K_{\text{жс} \max} = \frac{1}{2} A_n^2 \Omega_n^2 \left\{ \int_0^1 m_*(x) Z_n(x) dx + \sum_{i=1} m_{\text{жсі}} \cdot Z_n^2(x_i) \cdot \left(1 + \frac{m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{\text{жсі}} \cdot \Omega_n^2} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

де $m_* = \frac{1}{l} (M - \sum_{i=1} m_{\text{жсі}})$ – питома маса корпусу цистерни; M – повна маса цистерни з рідиною.

Застосовуючи принцип Релея ($\Pi_{max} = K_{max}$), отримуємо інтегродиференціальний вираз для визначення квадрата кругової частоти n -го тону згинальних коливань системи “цистерна – рухома рідина”:

$$\Omega_n^2 = \frac{\int_0^1 EI(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \pm A_n^2 \int_0^1 F(x) \left[\frac{\partial^2 z_n(x_i, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \sum_{i=1} Z_n(x_i) \cdot c_i \left(\frac{m_{жсi} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{жсi} \cdot \Omega_n^2} \right)^2}{\int_0^1 m_*(x) Z_n(x) dx + \sum_{i=1} m_{жсi} \cdot Z_n^2(x_i) \cdot \left(1 + \frac{m_{жсi} \cdot \Omega_n^2}{c_i - m_{жсi} \cdot \Omega_n^2} \right)^2}. \quad (14)$$

Кругову частоту Ω_n за формулою (14) обчислюємо методом послідовних наближень. З урахуванням гідродинамічної дії рухомої рідини з достатньою для інженерних розрахунків точністю зазвичай обмежуються першим тоном коливань $n = 1$. Як показують розрахунки, для визначення Ω_n достатньо двох-трьох наближень. Подібні задачі, коли повторюються однотипні операції, доцільно розв’язувати за допомогою комп’ютерної техніки.

Як ілюстрацію запропонованого методу наведемо приклад динамічного розрахунку системи “цистерна – рухома рідина” бензовоза на шасі автомобіля типу МАЗ для двох екстремальних випадків: розгону автомобіля та наїзду на шляхову перешкоду.

Осцилограми зміни крутних моментів на осі ведучих коліс $T_{кр}$ у часі t зображені на рис. 3.

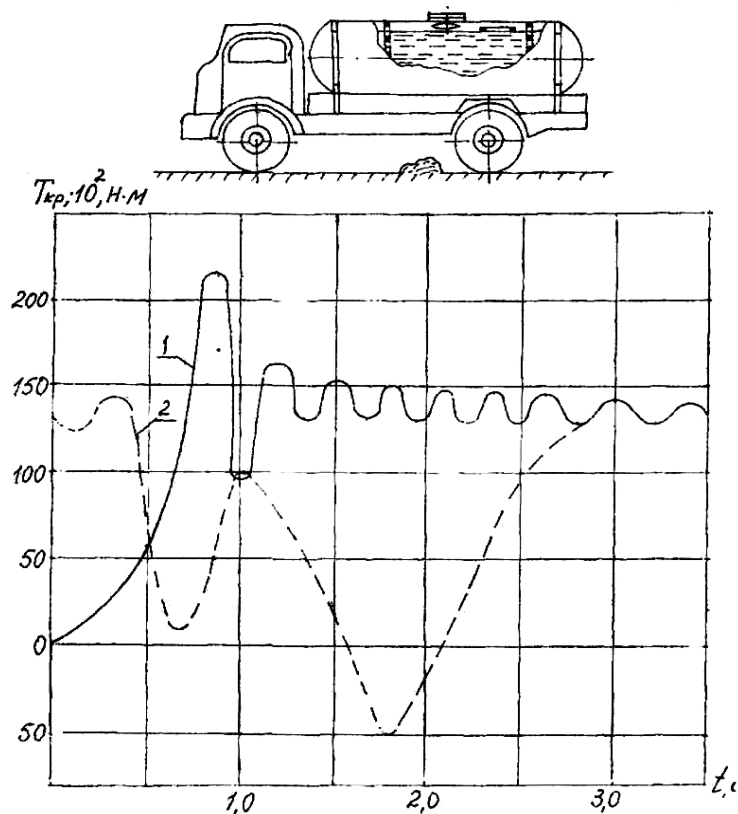


Рис. 3. Осцилограми зміни крутних моментів:
1 – розгон автомобіля; 2 – наїзд на шляхову перешкоду

Для визначення власних частот згинальних коливань системи “цистерна – рухома рідина” вважатимемо, що в цистерні розміщується тільки одна маса рухомої рідини $m_{жс}$ (зведена маса при $i = 1$), а бензовоз має такі характеристики: $R = 0,4$ м – радіус ведучого колеса; $M = 3300$ кг – маса цистерни з паливом; $d = 1,2$ м, $l = 3$ м, $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м – відповідно діаметр, довжина і товщина стінки циліндричної частини цистерни; $\rho_n = 0,78 \cdot 10^3$ кг/м³ і $H = 1,1$ м – відповідно густина і висота стовпа рідини; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\rho_k = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ – параметри матеріалу конструкції цистерни.

Опрацьовані осцилограми у вигляді відповідних кривих зміни частот змущених коливань у випадках розгону ω_p та наїзду на перешкоду $\omega_{п}$ представлені на рис. 4.

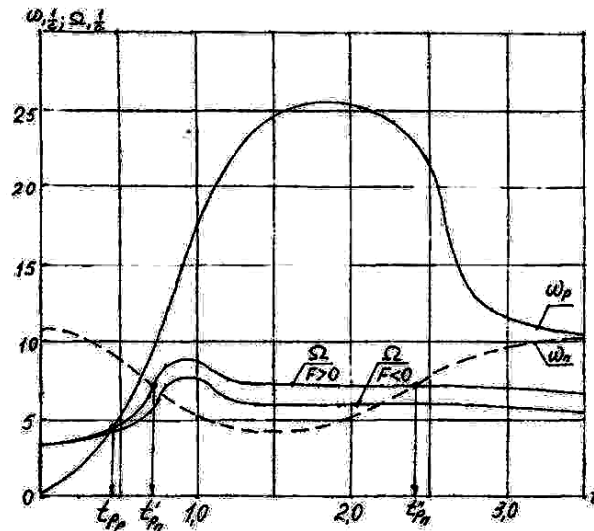


Рис. 4. Графік зміни частот коливання

Також додатково підраховані:

– для 1-го тону коливань корінь рівняння (2) $v_1=1,84$, тоді $\bar{v}_1 = v_1 \cdot \frac{2H}{d} = 1,84 \cdot \frac{2 \cdot 1,1}{1,2} = 3,373$;

– маса рухомої рідини

$$m_{ж1} = \frac{\pi d^3}{4} \cdot \frac{\rho_{п}}{v_1(v_1^2 - 1)} \cdot \text{th}(\bar{v}_1) = \frac{\pi \cdot 1,2^3}{4} \cdot \frac{0,78 \cdot 10^3}{1,84(1,84^2 - 1)} \cdot \text{th}(3,373) = 245 \text{ кг};$$

– питома маса цистерни

$$m_* = \frac{M}{l} = \frac{3300}{3} = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}} \text{ – для першого наближення};$$

$$m_* = \frac{M - m_*}{l} = \frac{3300 - 245}{3} = 1018 \frac{\text{кг}}{\text{м}} \text{ – для наступних наближень};$$

– жорсткість пружинних зв'язків

$$c_i = \frac{2m_{ж1}gn_x(t)}{d} \cdot v_1 \cdot \text{th}(\bar{v}_1) = \frac{2 \cdot 245 \cdot 10 \cdot n_x(t)}{1,2} \cdot 1,84 \cdot \text{th}(3,373) = 7513 \cdot n_x(t);$$

– циліндрична питома жорсткість корпусу цистерни

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 2289 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Задаючи пружну лінію деформованої цистерни-балки гармонічною функцією

$$Z = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

і використовуючи вихідні дані, вираз (14) після нескладних перетворень для першого тону коливань матиме вигляд

$$\Omega_n^2 = \frac{12386 \pm F(t) + 7513 \cdot n_x(t) \cdot \left(\frac{245 \cdot \Omega_{k-1}^2}{7513 \cdot n_x(t) - 245 \cdot \Omega_{k-1}^2}\right)^2}{1,5 \cdot m_*(x) + 245 \cdot \left(1 + \frac{245 \cdot \Omega_{k-1}^2}{7513 \cdot n_x(t) - 245 \cdot \Omega_{k-1}^2}\right)^2}, \quad (15)$$

де $F(t)$ і $n_x(t)$ – осьова сила та коефіцієнт перевантаження, які є функціями часу t і визначаються з

осцилограм (див. рис. 3); $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ – число наблизень у послідовному процесі визначення частоти.
Для розрахунку власних кругових частот Ω_k за формулою (15) застосована комп'ютерна програма, складена за таким алгоритмом:

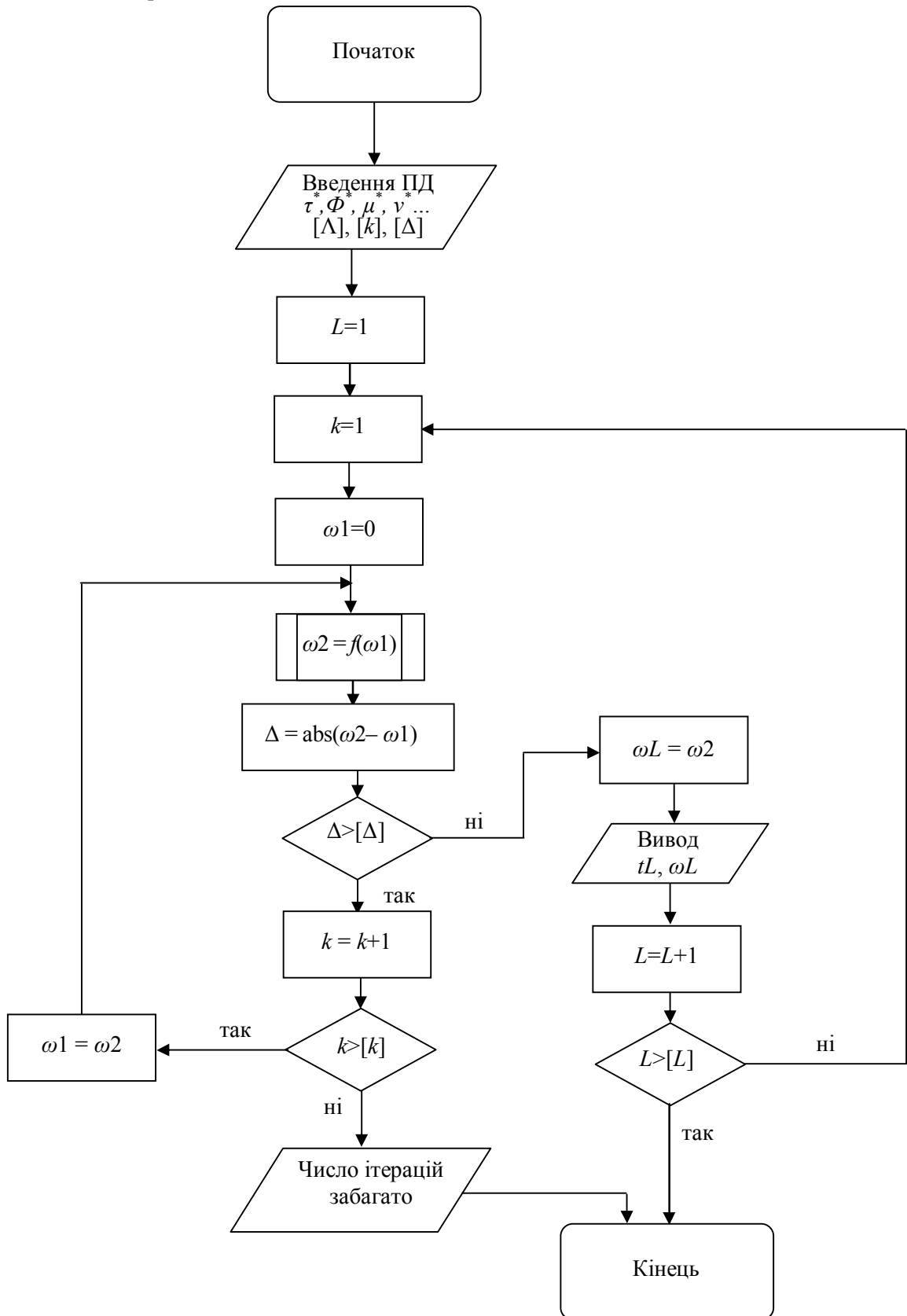


Рис. 5. Алгоритм розрахунку власних кругових частот

За результатами розрахунків побудовані графіки залежності $\Omega_k = f(t)$ (див. рис. 4) для розтяжних ($F > 0$) і стискних ($F < 0$) осьових сил, що діють на цистерну.

Зазначені графіки зміни власних Ω_k і вимушених ω частот коливання свідчать про наявність резонансних явищ: одного резонансу у випадку розгону автомобіля ($t = t_{pp}$) та двох резонансів – у разі подолання дорожньої перешкоди ($t = t'_{pp}$ і $t = t''_{pp}$).

Графіки (див. рис. 4) перебудовують через коефіцієнт динамічності k_z за допомогою формули:

$$k_z = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}$$

Результат перебудови наведено на рис. 6.

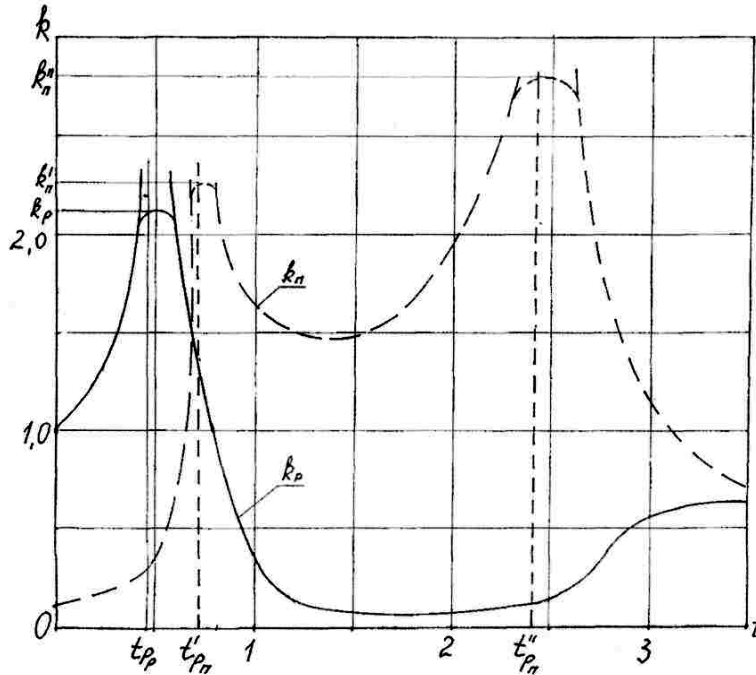


Рис. 6. Графік зміни коефіцієнта динамічності

Під час резонансу коефіцієнт динамічності k_z теоретично нескінченно зростає. В дійсності його величина обмежена силами опору: нелінійних сил пружності корпусу цистерни, інертності маси рідини, тертя між рухомою рідиною та стінкою цистерни і т. ін.

Поперечний динамічний удар може пошкодити кришку заливної горловини цистерни, порушити герметичність корпусу, ускладнити режим руху автомобіля.

У разі нерівномірного руху автомобіля, особливо в екстремальних випадках, значно перевантажується днище цистерни. Умова відриву днища від корпусу цистерни:

$$\sigma_d = \frac{F_{dx}}{A} < [\sigma_e], \quad (16)$$

де σ_e – нормальні динамічні напруження у зварювальному шві; $F_{dx} = m_{жс} \cdot g \cdot k_x$ – осьова динамічна сила, що діє на днище; $[\sigma_e]$ – припустиме напруження розриву зварювального шва; $K_x = \sqrt{\frac{l}{\Delta l}}$ – коефіцієнт динамічності в осьовому напрямку;

$\Delta l = \frac{m_{жс1} \cdot g \cdot n_x \cdot l}{2E \cdot A}$ – абсолютна осьова деформація корпусу цистерни; $A = \pi d \cdot \delta$ – поперечна площа оболонки цистерни.

Вважаючи, що рухома маса рідини $m_{жс1}$ починає рухатися із середини цистерни ($0 \leq x \leq \frac{l}{2}$), та використовуючи вихідні дані, знаходимо умову (16)

$$\sigma_d = \frac{F_{дХ}}{A} = \sqrt{\frac{2E \cdot m_{ж1} \cdot g}{\pi d \cdot \delta \cdot n_x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 245 \cdot 10}{\pi \cdot 1,2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,61}} = 180 \text{ МПа} \approx [\sigma_e].$$

Для конструктивних сталей припустимі напруження $[\sigma]$ складають 180...160 МПа. За сучасними технологіями (лазерне зварювання) міцність зварювального шва не нижче міцності материкового матеріалу, тобто $[\sigma_e] \leq 180$ МПа. Таким чином, для розглянутих випадків навантаження можливість відриву днища цистерни є ймовірною.

Висновки

Запропонований метод дає можливість оцінити якісний і кількісний характер динамічного навантаження рухомої цистерни з рідиною і рекомендувати безпечні режими руху в екстремальних ситуаціях.

Список використаних джерел

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Собр. соч. Вып. 1. – М., Л. : ГНТИ, 1931. – Т. 2. – 136 с.
2. Микишев Г. В. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г. В. Микишев, Б. И. Рабинович. – М. : Воениздат, 1971. – 463 с.
3. Колесников К. С. Динамика ракет / К. С. Колесников. – М. : Воениздат, 1980. – 376 с.

Стаття надійшла до редакції 15.02.2011 р.