УДК 517.958

В. Д. Душкін

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗСІЯННЯ Е-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ НА ПЕРІОДИЧНІЙ СТРУКТУРІ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З БРУСІВ ТА ЕКРАНА

Побудовано математичну модель дифракції Е-поляризованої хвилі на структурі, що складається з брусів та екрана. Початкові крайові задачі зводяться до системи граничних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду, які можуть бути розв'язані чисельно за допомогою методу дискретних особливостей.

Постановка проблеми. Одним з ефективних сучасних методів розв'язання задач електродинаміки є метод інтегральних перетворень, який був запропонований Ю. В. Ганделем [1…3]. Однак на основі цього методу не побудовано математичної моделі дифракції Е-поляризованої хвилі на структурі, що складається з брусів та екрана. Така структура є основою для побудови математичних моделей процесів розсіяння електромагнітних хвиль на більш складних багатошарових структурах, які знаходяться у неоднорідному середовищі. Тому побудова математичної моделі дифракції Е-поляризованої хвилі на структурі, що складається з брусів та екрана, є актуальною.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Математична модель дифракції електромагнітних хвиль на структурі, що складається з брусів, є однією з класичних структур у сучасній електродинаміці [4]. Перші результати чисельного моделювання для цієї структури були отримані за допомогою методу напівобертання [5]. Розв'язання задачі дифракції на періодичній системі брусів, отриманої за допомогою методу інтегральних перетворень, розглянуто у роботах [6; 7]. Результати є основою для побудови математичних моделей більш складних електродинамічних структур [8; 9].

Мета статті – побудова математичної моделі процесів дифракції Е-поляризованої хвилі на структурі, яка складається з брусів та екрана. Основним методом дослідження є метод інтегральних перетворень.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо $2l'$ періодичну структуру (рис. 1), яка складається з прямокутних металічних брусів, розташованих у шарі $|z'| \leq d'$, та екрана, що повністю заповнює площину $z' = -D$. На періоді знаходяться M каналів різної ширини. Усі елементи дифракційних структур є ідеально провідними.

Згідно з умовами Флоке розв'язок задачі достатньо знайти у шарі $0 \leq y' \leq 2l'$.

Уведемо позначення:

$$\Omega^{+} = \left\{ (y', z') \in R^2 \;\middle|\; z' > d', 0 \leq y' \leq 2l' \right\},$$

$$\Omega^{-} = \left\{ (y', z') \in R^2 \;\middle|\; -D < z' < -d', 0 \leq y' \leq 2l' \right\},$$

$$\Omega_q = \left\{ (y', z') \in R^2 \;\middle|\; -d' < z' < d, \alpha'_q < y' < \beta'_q \right\} \quad q = 1, \ldots, M.$$

Нехай з нескінченності згори на дифракційну структуру похило падає Е-поляризована плоска електромагнітна хвиля:

$$E_x(y', z') = \exp\left(ik \left(y' \cdot \sin\varphi - (z' - d') \cdot \cos\varphi \right) \right). \tag{1}$$

Необхідно знайти повне поле, що є результатом дифракції хвилі на решітці.

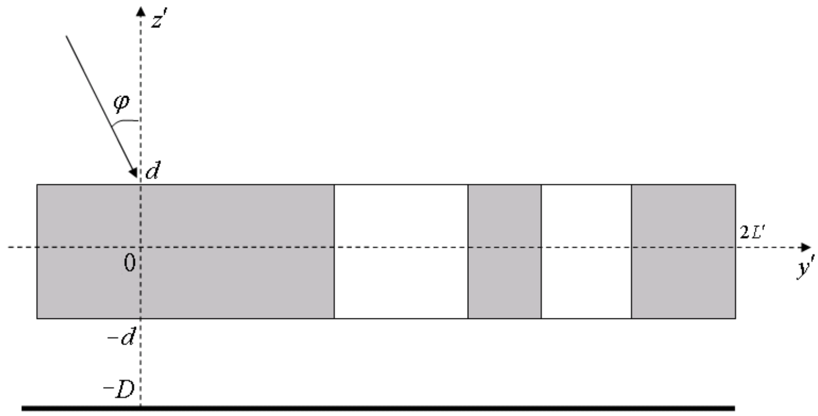

Рис. 1. Переріз дифракційної структури площиною YOZ

Нехай $u_0(y',z')$ рішення в області Ω^+ допоміжної задачі дифракції Е-поляризованої хвилі, визначеної формулою (1), на екрані, який повністю заповнює площину $z' = -D$ і є ідеально провідним. Згідно з граничними умовами на поверхні структури виконується рівність:

$$u_0(y',d') = 0, \quad y' \in R.$$

Функція $u_0(y',z')$ має такий вигляд:

$$u_0(y',z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - \left(z' - d'\right) \cdot \cos\varphi\right)\right) - \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi + \left(z' - d'\right) \cdot \cos\varphi\right)\right)$$

і властивість:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z'}(y',d') = -2ik\cos\varphi \cdot \exp\left(iky'\sin\varphi\right).$$

Повне поле $u(y',z')$ шукатимемо у вигляді:

$$u(y',z') = \begin{cases} u_0(y',z') + u^+(y',z'), & \left(y',z'\right) \in \Omega^+; \\ u_q(y',z'), & \left(y',z'\right) \in \Omega_q \ \left(q = 1,\ldots,M\right); \\ u^-(y',z'), & \left(y',z'\right) \in \Omega^-. \end{cases}$$

Поле $u^+(y',z')$ у області Ω^+ має вигляд:

$$u^+(y',z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot e^{-\gamma'_n(z'-d')} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}, \tag{2}$$

де

$$p'_n = k \cdot \sin\varphi + \frac{\pi n}{l}, \ \gamma'_n = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2}, \quad n \in Z,$$

$$\mathrm{Re}\left(\gamma'_n\right) \geq 0, \quad \mathrm{Im}\left(\gamma'_n\right) \leq 0, \quad n \in Z.$$

Поле $u^-(y',z')$ у області Ω^- має такий вигляд:

$$u^-(y',z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \cdot \frac{sh\left(\gamma'_n\left(z' + D'\right)\right)}{sh\left(\gamma'_n\left(D' - d'\right)\right)} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}. \tag{3}$$

Поля $u_q(y',z')$ у областях Ω_q шукаємо у вигляді

$$u_q(y',z') = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q} \cdot \frac{sh\left(\gamma'_{n,q} z'\right)}{sh\left(\gamma'_{n,q} d'\right)} + b_{2,n,q} \cdot \frac{ch\left(\gamma'_{n,q} z'\right)}{ch\left(\gamma'_{n,q} d'\right)}\right) \cdot \sin\left(p'_{n,q}\left(y' - \alpha'_q\right)\right), \tag{4}$$

де

$$p'_{n,q} = \frac{\pi n}{\beta'_q - \alpha'_q}, \ \gamma'_{n,q} = \sqrt{\left(p'_{n,q}\right)^2 - k^2}, \quad n \in N, \quad q = 1,\ldots,M. \tag{5}$$

Уведемо безрозмірні координати та параметри:

$$\partial\ell = \frac{l'k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda}, \qquad y = \frac{\pi}{l'}y', \qquad z = \frac{\pi}{l'}z',$$

$$\gamma_n = \frac{l' \cdot \gamma'_n}{\pi}, \quad p_n = \frac{l' \cdot p'_n}{\pi} = \partial\ell \cdot \sin\varphi + n, \quad n \in Z;$$

$$d'_q = \frac{l'}{\pi}d_q, \quad \alpha'_q = \frac{l'}{\pi}\alpha_q, \quad \beta'_q = \frac{l'}{\pi}\beta_q, \quad \theta_q = \frac{l'}{\beta'_q - \alpha'_q} = \frac{\pi}{\beta_q - \alpha_q}, \quad \left(q = 1,\ldots,M\right);$$

$$\gamma_{n,q} = \frac{l' \cdot \gamma'_{n,q}}{\pi} = \sqrt{\left(p_{n,q}\right)^2 - k^2\varepsilon_q} = \sqrt{\left(n \cdot \theta_q\right)^2 - \partial\ell^2\varepsilon_q} = |n| \cdot \theta_q\sqrt{1 - \frac{\partial\ell^2\varepsilon_q}{\left(n \cdot \theta_q\right)^2}},$$

$$p_{n,q} = \frac{l' \cdot p'_{n,q}}{\pi} = \frac{\pi n}{\beta_q - \alpha_q} = n \cdot \theta_q, \quad n \in N, \quad \left(q = 1,\ldots,M\right).$$

Припустимо, що

$$\mathrm{L}=\left\{ y\in\bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M}(\alpha_q,\beta_q) \middle| \; 0<\alpha_1<\beta_1<\ldots<\alpha_q<\beta_q\ldots<\alpha_M<\beta_M<2\pi \right\}.$$

Наслідком граничних умов обертання повного поля у нуль на поверхні ідеально провідної структури є рівності:

$$u^{+}(y,d)=0,\quad y\in CL=[0,2\pi]\setminus L\,; \tag{6}$$

$$u^{-}(y,-d)=0,\quad y\in CL\,; \tag{7}$$

$$u^{-}(y,-D)=0,\quad y\in[0,2\pi];$$

$$u_q^{-}(\alpha_q,z)=u_q^{-}(\beta_q,z)=0,\quad |z|<d,\quad (q=1,\ldots,M).$$

Наслідком неперервності поля та його похідних на спільній частині границі областей Ω^{+}, Ω^{-} та Ω_q є такі співвідношення:

$$u^{+}(y,d)=u_q(y,d),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M); \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,d)+\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,d)=\frac{\partial u_q}{\partial z}(y,d),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M)\,; \tag{9}$$

$$u^{-}(y,-d)=u_q(y,-d),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M); \tag{10}$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-d)=\frac{\partial u_q}{\partial z}(-y,d),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M). \tag{11}$$

З виразів (2), (3), (4), граничних умов (6), (7) та умов спряження (8) … (11) для величин a_n^{+}, $a_n^{-}, b_{1,n,q}$, $b_{2,n,q}$ отримуємо співвідношення:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{+}\exp(ip_n y)=0,\quad y\in CL\,;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{+}\exp(ip_n y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q}+b_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M);$$

$$-2i\partial\ell\cos\varphi\cdot\exp(i\partial\ell y\sin\varphi)-\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{+}\cdot W_n^{+}\cdot\exp(ip_n y)=$$

$$=\theta_q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\left(b_{1,n,q}W_{1,n,q}+b_{2,n,q}W_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right),\, y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M); \tag{12}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-}\exp(ip_n y)=0,\quad y\in CL\,;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-}\exp(ip_n y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-b_{1,n,q}+b_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right),\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-}\cdot W_n^{-}\cdot\exp(ip_n y)=\theta_q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\left(b_{1,n,q}W_{1,n,q}-b_{2,n,q}W_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right),$$

$$y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M); \tag{13}$$

де

$$W_n^{+}=\gamma_n,\qquad W_n^{-}=\gamma_n\cdot cth\left(\gamma_n(D-d)\right),\quad n\in Z\,,$$

$$W_{1,n,q}=\frac{\gamma_{n,q}}{\theta_q}\cdot cth\left(\gamma_{n,q}d\right),\qquad W_{2,n,q}=\frac{\gamma_{n,q}}{\theta_q}\cdot th\left(\gamma_{n,q}d\right),\quad n\in N,\quad (q=1,\ldots,M).$$

Справедливі асимптотичні рівності:

$$W_{m,n,q} = n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \quad (m = 1,2), \quad (q = 1,\ldots,M);$$

$$W_n^{\pm} = |n| + \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty .$$

Введемо функції:

$$F^{+}(y) = \frac{\partial u^{+}}{\partial y}(y,d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ip_n \cdot a_n^{+} \exp(ip_n y), \quad y \in R ;$$

$$F^{-}(y) = \frac{\partial u^{-}}{\partial y}(y,-d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ip_n \cdot a_n^{-} \exp(ip_n y), \quad y \in R ,$$

які мають властивості:

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F^{+}(t)\, dt = 0, \quad (q = 1,\ldots,M); \tag{14}$$

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F^{-}(t)\, dt = 0, \quad (q = 1,\ldots,M); \tag{15}$$

$$F^{+}(y) = 0, \quad y \in CL ;$$

$$F^{-}(y) = 0, \quad y \in CL .$$

Коефіцієнти $a_n^{\pm}$ мають такі інтегральні подання:

$$a_n^{+} = \frac{1}{2\pi i p_n} \int_L F^{+}(t) \exp(-ip_n t)\, dt, \quad n \in Z/\{0\};$$

$$a_n^{-} = \frac{1}{2\pi i p_n} \int_L F^{-}(t) \exp(-ip_n t)\, dt, \quad n \in Z/\{0\};$$

$$a_0^{+} = \frac{1}{2\pi} \int_L F(t) \frac{\exp(-ip_0 t) - 1}{ip_0}\, dt ;$$

$$a_0^{-} = \frac{1}{2\pi} \int_L F(t) \frac{\exp(-ip_0 t) - 1}{ip_0}\, dt .$$

Виконуючи перетворення, подібні до перетворень, які були у роботах [6…9], отримуємо:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,d) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{+} \cdot W_n^{+} \exp(ip_n y) = -\left[-\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\partial\ell \sin\varphi(y-t)} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^{+}(t)\, dt - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{W_0^{+} \exp(ip_0 y) - 1}{2ip_0} F^{+}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_n^{+}}{2ip_n} \exp(ip_n(y-t)) F^{+}(t)\, dt \right], \tag{16}$$

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z}(y,-d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-} \cdot W_n^{-} \exp(ip_n y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\partial\ell \sin\varphi(y-t)} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right) F^{-}(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_L \frac{W_0^{-} \exp(ip_0 y) - 1}{2ip_0} F^{-}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_n^{-}}{2ip_n} \exp(ip_n(y-t)) F^{-}(t)\, dt , \tag{17}$$

де

$$\Delta_n^+ = W_n^+ - |n| - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty;$$

$$\Delta_n^- = W_n^- - |n| - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{|n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Уведемо функції $F_q^+(y)$ та $F_q^-(y)$, які є звуженням функцій $F^+(y)$ та $F^-(y)$ на інтервалі (α_q, β_q):

$$F_q^+(y) = \frac{\partial}{\partial y} u_q(y,d) = \theta_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} + b_{2,n,q}\right) \cdot n \cdot \cos\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right), \tag{18}$$
$$y \in \left(\alpha_q, \beta_q\right), \quad (q = 1, \ldots, M);$$

$$F_q^-(y) = \frac{\partial}{\partial y} u_q(y,-d) = \theta_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-b_{1,n,q} + b_{2,n,q}\right) \cdot n \cdot \cos\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right), \tag{19}$$
$$y \in \left(\alpha_q, \beta_q\right), \quad (q = 1, \ldots, M).$$

Аналіз формул (18), (19) вказує на те, що:

$$b_{1,n,q} = \frac{1}{\pi n} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \left(F_q^+(t) - F_q^-(t)\right) \cos\left(\theta_q \cdot n\left(t - \alpha_q\right)\right) dt, \quad n \in N, \quad (q = 1, \ldots, M); \tag{20}$$

$$b_{2,n,q} = \frac{1}{\pi n} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \left(F_q^+(t) + F_q^-(t)\right) \cos\left(\theta_q \cdot n\left(t - \alpha_q\right)\right) dt, \quad n \in N, \quad (q = 1, \ldots, M). \tag{21}$$

Запишемо ряди, які стоять у правій частині співвідношень (12) та (13), у вигляді, зручному для подальших перетворень:

$$\theta_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} W_{1,n,q} \pm b_{2,n,q} W_{2,n,q}\right) \cdot \sin\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right) =$$
$$= \theta_q \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} \pm b_{2,n,q}\right) \cdot n \cdot \sin\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} \cdot \Delta_{1,n,q} \pm b_{2,n,q} \cdot \Delta_{2,n,q}\right) \cdot \sin\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right)\right], \tag{22}$$

де

$$\Delta_{m,n,q} = W_{m,n,q} - n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \quad (m = 1,2). \tag{23}$$

Наслідком властивостей перетворення Гільберта [3] є співвідношення:

$$-\sin\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right) =$$
$$= \frac{\theta_q}{2\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q \frac{t - y}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\theta_q \frac{t + y - 2\alpha_q}{2}\right)\right\} \cos\left(\theta_q \cdot n\left(t - \alpha_q\right)\right) dt, \quad (q = 1, \ldots, M).$$

З формули (23) та виразів (18), (19) функцій $F_q^+(y)$ і $F_q^+(y)$ отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} + b_{2,n,q}\right) \cdot n \cdot \sin\left(\theta_q \cdot n\left(y - \alpha_q\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \left\{\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\theta_q \frac{t - y}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\theta_q \frac{t + y - 2\alpha_q}{2}\right)\right\} \cdot \theta_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1,n,q} + b_{2.n,q}\right) \cdot n \cdot \cos\left(\theta_q \cdot n\left(t - \alpha_q\right)\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{+}(t)\,dt\,; \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q}-b_{2,n,q}\right)\cdot n\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right)=$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot\theta_q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q}-b_{2,n,q}\right)\cdot n\cdot\cos\left(\theta_q\cdot n\left(t-\alpha_q\right)\right)dt=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{-}(t)\,dt\,. \tag{25}$$

З формул (20), (21) маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{1,n,q}\cdot\Delta_{1,n,q}\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot\left(F_q^{+}(t)-F_q^{-}(t)\right)dt\,; \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2,n,q}\cdot\Delta_{2,n,q}\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{2,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot\left(F_q^{+}(t)+F_q^{-}(t)\right)dt\,. \tag{27}$$

З (24) … (27) і співвідношення (22) для функцій $\frac{\partial u_q}{\partial z}(y,d)$ та $\frac{\partial u_q}{\partial z}(y,-d)$ отримуємо інтегральні подання:

$$\frac{\partial u_q}{\partial z}(y,d)=\theta_q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q}W_{1,n,q}+b_{2,n,q}W_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right)=$$

$$=\theta_q\cdot\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{+}(t)\,dt+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}+\Delta_{2,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot F_q^{+}(t)\,dt-$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}-\Delta_{2,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot F_q^{-}(t)\,dt\right]; \tag{28}$$

$$\frac{\partial u_q}{\partial z}(y,-d)=\theta_q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{1,n,q}W_{1,n,q}-b_{2,n,q}W_{2,n,q}\right)\cdot\sin\left(\theta_q\cdot n\left(y-\alpha_q\right)\right)=$$

$$=\theta_q\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{-}(t)\,dt+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}-\Delta_{2,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot F_q^{+}(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}+\Delta_{2,n,q}}{n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\}\cdot F_q^{-}(t)\,dt\Bigg]. \quad (29)$$

Уведемо позначення:

$$Q_0^{+}(y,t)=\left[-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_n^{+}}{2ip_n}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right)+\frac{t\cdot W_0^{+}\exp\left(ip_0 y\right)}{2}+\frac{e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}-1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right)\right];$$

$$Q_0^{-}(y,t)=\left[-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_n^{-}}{2ip_n}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right)+\frac{t\cdot W_0^{-}\exp\left(ip_0 y\right)}{2}+\frac{e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}-1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right)\right];$$

$$Q_q^{\pm}(y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n,q}\pm\Delta_{2,n,q}}{2n}\cdot\left\{\sin\left(\theta_q\left(y-t\right)\right)+\sin\left(\theta_q\left(t+y-2\alpha_q\right)\right)\right\},\quad \left(q=1,\ldots,M\right).$$

Підставляючи у співвідношення (12), (13) інтегральні подання полів (16), (17), (28), (29), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР):

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right)F^{+}(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_L Q_0^{+}(y,t)F^{+}(t)\,dt+$$
$$+\frac{\theta_q}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{+}(t)\,dt-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}Q_q^{+}(y,t)\cdot F_q^{+}(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}Q_q^{-}(y,t)\cdot F_q^{-}(t)\,dt=$$
$$=2i\partial\ell\cos\varphi\cdot\exp\left(i\partial\ell y\sin\varphi\right),\quad y\in\left(\alpha_q,\beta_q\right),\quad\left(q=1,\ldots,M\right); \quad (30)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\operatorname{ctg}\left(\frac{t-y}{2}\right)F^{-}(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_L Q_0^{-}(y,t)F^{-}(t)\,dt+$$
$$+\frac{\theta_q}{2\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t-y}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{t+y-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\cdot F_q^{-}(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}Q_q^{-}(y,t)\cdot F_q^{-}(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}Q_q^{+}(y,t)\cdot F_q^{+}(t)\,dt=0,$$
$$y\in\left(\alpha_q,\beta_q\right),\quad\left(q=1,\ldots,M\right), \quad (31)$$

розв'язки яких задовольняють додатковим умовам (14), (15).

Згідно з умовами Майкснера на ребрі:

$$F^{\pm}(y)=O\left(r^{-1/3}\right),\quad r\to 0,$$

де

$$r=\min_{q=1,\ldots,M}\left(\left|y-\alpha_q\right|,\left|y-\beta_q\right|\right).$$

Умови Майкснера будуть виконані, якщо ми шукатимемо функції $F_q^{\pm}(y)$ у вигляді:

$$F_q^{+}(y)=\frac{v_q^{+}(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q\right)\left(\beta_q-y\right)}},\quad y\in\left(\alpha_q,\beta_q\right),\quad\left(q=1,\ldots,M\right); \quad (32)$$

$$F_q^-(y)=\frac{v_q^-(y)}{\sqrt{(y-\alpha_q)(\beta_q-y)}},\quad y\in(\alpha_q,\beta_q),\quad (q=1,\ldots,M),\tag{33}$$

де $v_q^{\pm}(y)\in C^{0,\alpha}[\alpha_q,\beta_q],\quad (q=1,\ldots,M),\quad \alpha>0$.

Уведемо відображення:

$$g_q:[-1,1]\to[\alpha_q,\beta_q],\quad g_q(\tau)=\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\tau+\frac{\beta_q+\alpha_q}{2},\quad (q=1,\ldots,M)\tag{34}$$

та позначення:

$$R_{1,q,m}^+(\xi,\tau)=Q_0^+\left(g_q(\xi),g_m(\tau)\right)-Q_q^+\left(g_q(\xi),g_m(\tau)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{g_m(\tau)-g_q(\xi)}{2}\right)-\delta_{q,m}\cdot\frac{1}{g_q(\tau)-g_q(\xi)},$$

$$(q=1,\ldots,M,\quad m=1,\ldots,M);$$

$$R_{1,p,l}^-(\xi,\tau)=Q_0^-\left(g_p(\xi),g_l(\tau)\right)+Q_p^-\left(g_p(\xi),g_l(\tau)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{g_l(\tau)-g_p(\xi)}{2}\right)-\delta_{p,l}\cdot\frac{1}{g_p^-(\tau)-g_p^-(\xi)},$$

$$(p=1,\ldots,M,\quad l=1,\ldots,M);$$

$$R_{2,q,s}^+(\xi,\tau)=\delta_{qs}\cdot Q_q^-\left(g_q(\xi),g_s(\tau)\right),$$

$$(q=1,\ldots,M,\quad s=1,\ldots,M);$$

$$R_{2,p,n}^-(\xi,\tau)=-\delta_{pn}\cdot Q_q^+\left(g_p(\xi),g_n(\tau)\right),$$

$$(p=1,\ldots,M,\quad n=1,\ldots,M).$$

Використовуючи (32) … (34), переходимо від системи СІР (30), (31) на системі відрізків L до системи СІР на стандартному інтервалі $\xi\in(-1,1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_q(\tau)-g_q(\xi)}\frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{\theta_q}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{g_q(\tau)-g_q(\xi)}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{g_q(\tau)+g_q(\xi)-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{1,q,m}^+(\xi,\tau)\frac{V_m^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{2,q,s}^+(\xi,\tau)\frac{V_s^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=2i\partial\ell\cos\varphi\cdot\exp\left(i\partial\ell g_q(\xi)\sin\varphi\right),$$

$$|\xi|<1,\quad (q=1,\ldots,M);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_p^-(\tau)-g_p^-(\xi)}\frac{V_p^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{\theta_q}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{g_q(\tau)-g_q(\xi)}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\theta_q\frac{g_q(\tau)+g_q(\xi)-2\alpha_q}{2}\right)\right\}\frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{1,p,l}^-(\xi,\tau)\frac{V_l^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{2,p,n}^-(\xi,\tau)\frac{V_n^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,$$

$$|\xi|<1,\quad (p=1,\ldots,M),$$

рішення яких задовольняють додатковим умовам:

$$\int_{-1}^{1}\frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,\quad (q=1,\ldots,M);$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{V_p^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \quad (p = 1,\ldots,M).$$

Висновки

У процесі побудови моделі початкова крайова задача зводиться до систем сингулярних рівнянь першого роду. Таку систему розв'язують за допомогою методу дискретних особливостей. Отримані у результаті перетворень системи СІР не мають такої форми, як СІР задачі дифракції на періодичній системі брусів. Для чисельного розв'язання цієї системи може бути застосована модифікація МДО [10; 11].

Список використаних джерел

1. Гандель Ю. В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Ю. В. Гандель / Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Вып. 38. – Х. : Выща шк., 1982. – С. 15 – 18.

2. Гандель Ю. В. Математические модели в электродинамике на основе теории парных уравнений и метода дискретных особенностей / Ю. В. Гандель // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : тезисы докл. VI Междунар. симпоз. Ч. I. – Х., 1993. – С. 16 – 17.

3. Гандель Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики / Ю. В. Гандель // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66.

4. Шестопалов В. П. Дифракционные решетки / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко // Резонансное рассеяние волн : в 2 т. – К. : Наук. думка, 1986. – Т. 1. – 232 с.

5. Масалов С. А. Дифракция электромагнитных волн на пространственной периодической решетке, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения. / С. А. Маслов, И. Е. Тарапов // ЖВМ, 1964, 9, № 1, С. 53–60.

6. Гандель Ю. В. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на периодических многоэлементных решетках, состоящих из прямоугольных брусьев / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин, М. Б. Фельдман – Х. – 1994. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в ГНТБ Украины 5.12.94. № 2290-Ук94.

7. Душкин В. Д. Системы сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на периодических структурах / В. Д. Душкин // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач математичної фізики : Збірник наукових праць Інституту математики НАН України. Вип. 12. – К., 1996. – С. 66–72.

8. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов / В. Д. Душкин // Доп. НАН України. – К., 1999. – № 9, С. 11–15.

9. Душкин В. Д. Применение метода сингулярных интегральных преобразований к решению двумерных задач дифракции электромагнитных волн на сверхпроводящем слое с прямоугольными волноведущими каналами / В. Д. Душкин // Радиотехника. Электромагнитные волны и электронные системы. М., 1999. – № 2, Т. 4. – С. 54–59.

10. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М. : Наука, 1985. – 256 с.

11. Гандель Ю. В. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции / Ю. В. Гандель, И. К. Лифанов, Т. С. Полянская // Дифференциальные уравнения. – 1995. – № 9, Т. 31 –С. 1536–1541.

Стаття надійшла до редакції 15.02.2011 р.