

УДК 539.3

В. А. Сало, П. І. Літовченко, С. С. Кириченко

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ОБОЛОНКОВІЙ КОНСТРУКЦІЇ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод, заснований на використанні варіаційного принципу Рейсснера, для визначення напружено-деформованого стану ослабленої прямокутними отворами пружної циліндричної оболонки, яка рівномірно обертається. Ефективність методу показана на конкретному прикладі. Представлено чисельні результати розрахунку періодичної ділянки циліндричної оболонки для різних значень геометричних параметрів.

К л ю ч о в і с л о в а: концентрація напружень, оболонкові конструкції, прямокутні отвори.

**Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень.** Пружні оболонки, що ослаблені отворами найрізноманітніших форм і розмірів, є одними з найбільш відповідальних елементів, від міцності яких нерідко залежить працездатність і надійність досліджуваної конструкції в цілому. З урахуванням тенденції розширення області застосування багатоз'язних пружних оболонок у сучасній техніці розроблення науково обґрунтованих методів одержання достовірних результатів розрахунків на міцність і жорсткість оболонок з концентраторами напружень є актуальною та практично значимою науковою проблемою.

У науковій літературі накопичено достатній обсяг матеріалу з методів розрахунку пружних оболонок, але при цьому об'єктом дослідження більшості робіт з проблеми концентрації напружень навколо отворів є оболонки з одним отвором. Що стосується періодичних задач для циліндричних оболонок, то їхньому розв'язуванню присвячена невелика кількість досліджень, заснованих лише на застосуванні класичної теорії оболонок. Розв'язування уточнених варіантів періодичних задач має велике практичне значення, а поширення циліндричних конструкцій з періодичними системами отворів зумовлює необхідність пошуку ефективних підходів до розрахунку зазначених оболонок.

**Мета статті** полягає в дослідженні за допомогою викладеного в монографії [1] ефективного чисельно-аналітичного RVR-методу кількісних і якісних закономірностей концентрації напружень в циліндричній оболонці з періодичною системою прямокутних отворів під дією відцентрового навантаження.

**Виклад основного матеріалу.** Як відомо, робочі лопатки парових турбін зв'язують у пакети стрічковими бандажами – сталевими смугами, згорнутими по дузі кола. Бандажі необхідні для демпфірування коливань і зменшення дії збуджуючих сил на окрему лопатку. Крім того, вони сприяють кращій організації парового потоку і зменшують втрати пари в робочому колесі, підвищуючи економічність турбіни. У бандажі є отвори для шпів робочих лопаток. Шпи розклепують, за рахунок чого бандаж утримується на лопатках. Основним навантаженням, що сприймає бандаж під час роботи турбіни, є навантаження від відцентрових сил.

Існують різні методи розрахунку на міцність стрічкових бандажів. Так, у монографії [2] наведено спрощений метод розрахунку, який має істотні недоліки і не дозволяє одержувати результати з достатнім ступенем точності. Більш точним формулюванням задачі є розгляд стрічкового бандажа як плоскої пластини з періодичною системою однакових отворів [3; 4].

Чисельне дослідження бандажа з круговими отворами, у якому його розглядають як пластину або як елемент циліндричної оболонки з кінцевою зсувною жорсткістю, проведено у праці [5]. В цій же роботі напружено-деформований стан стрічкового бандажа з періодичною системою жорстко защемлених кругових отворів досліджувався на основі варіаційного підходу, запропонованого в монографії [1]. У даній роботі предметом дослідження є більш складна задача, коли стрічковий бандаж є пружною оболонкою з періодичною системою отворів прямокутної форми. Будучи за своєю конструкцією елементом багатоз'язної циліндричної оболонки з радіусом  $R$  і сталою товщиною  $h$ , досліджуваний бандаж, якщо його розгорнути, є смугою, визначення напружено-деформованого стану якої внаслідок симетрії зводиться до дослідження періодичної області  $\Omega$  – розрахункової ділянки  $ABCDEF$  (див. рис. 1), де  $AB = a$ ;  $BC = b$ ;  $FE = c$ ;  $ED = d$  (координатна вісь  $x$  спрямована по твірній, а вісь  $y$  – по напрямній циліндра).

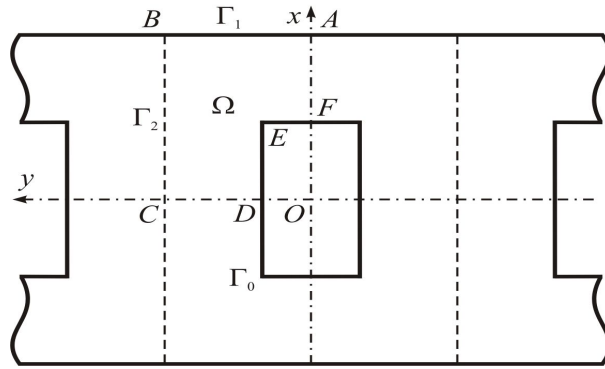


Рис. 1. Розрахункова періодична ділянка пружної області бандажа

Зазначимо, що в заводській практиці використання стрічкових бандажів відношення відповідних розмірів знаходяться у межах:

$$1 \leq \frac{b}{a} \leq \frac{5}{3}; \quad \frac{c}{a} \approx \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2} \leq \frac{d}{a} \leq \frac{2}{3}. \quad (1)$$

Основне навантаження, що сприймається бандажем, є результатом дії відцентрових сил. Це рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю:

$$q = \rho \omega^2 R h, \quad (2)$$

де  $\rho$  і  $\omega$  – щільність матеріалу і кутова швидкість обертання пружної оболонки.

Розіб'ємо границю області  $ABCDEF$  на елементи  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  ( $\omega_s = 0$  – рівняння елемента  $\Gamma_s$ ;  $s = \overline{0, 2}$ ), де  $\Gamma_0$  – контур отвору;  $\Gamma_1$  – контур  $AB$ ;  $\Gamma_2$  – контур  $BC$ . Вважаємо, що краї отворів жорстко защемлені, а торці оболонки ( $x = \pm b$ ) вільні від зовнішніх зусиль і моментів. Використовуючи метод Рітца для розв'язування варіаційного рівняння Рейсснера, введемо шукані функції: незалежні між собою узагальнені переміщення  $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$  та узагальнені зусилля  $N_x, N_y, S, M_x, M_y, H, Q_x$  і  $Q_y$  теорії оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю [6].

Граничні умови досліджуваної задачі на жорстко защемленому контурі  $\Gamma_0$ :

$$u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (3)$$

Граничні умови на вільній від зовнішніх зусиль і моментів границі  $\Gamma_1$ :

$$N_x = S = M_x = H = Q_x = 0. \quad (4)$$

Граничні умови на контурі  $\Gamma_2$  матимуть вигляд умов періодичності розв'язків:

$$v = S = Q_y = \gamma_2 = H = 0. \quad (5)$$

Наближений аналітичний розв'язок (шукані узагальнені переміщення й зусилля) сформульованої крайової задачі, який точно задовольняє заданим граничним умовам (3), (4) і (5), шукаємо у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{1m} P_{2i+1} C_j; & v &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{2m} P_{2i} S_j; \\ w &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{3m} P_{2i} C_j; & N_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{1m} P_{2i} C_j; \\ N_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{2m} P_{2i} C_j; & S &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{3m} P_{2i+1} S_j; \\ Q_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{7m} P_{2i+1} C_j; & Q_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{8m} P_{2i} S_j. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

У формулах (6)  $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{5m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{8m}$  – сталі, що підлягають визначенню;  $m = i(n_2 + 1) + j + 1$ ;  $P_n$  – поліном Лежандра ступеня  $n$  щодо змінної  $x$ ; функції  $C_j, S_j, \omega_0$  і  $\omega_1$  визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} C_j &= \cos \frac{j\pi}{a} y; & S_j &= \sin \frac{(j+1)\pi}{a} y; \\ \omega_0 &= \omega_2 \vee_0 \omega_3 = \omega_2 + \omega_3 + \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}; \\ \omega_1 &= \frac{1}{2b}(b^2 - x^2); & \omega_2 &= \frac{1}{2d}(x^2 - d^2); & \omega_3 &= \frac{1}{2c}(y^2 - c^2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Зазначимо також, що вирази для шуканих розв'язків  $\gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H$  будуть такими ж, як і вирази для  $u, v, N_x, N_y, S$  у формулах (6), якщо в останніх замінити  $A_{1m}, A_{2m}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}$  на  $A_{4m}, A_{5m}, B_{4m}, B_{5m}, B_{6m}$  відповідно. Після підстановки структури розв'язків (6) у варіаційне рівняння Рейсснера і обчислення відповідних інтегралів досліджувана крайова задача зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих сталих на базі програмної розробки, написаної на алгоритмічній мові Borland Pascal. Порядок симетричної стрічкової матриці системи рівнянь дорівнюватиме  $N = 13(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ .

**Чисельна реалізація дослідженої задачі.** Виконаємо розрахунок сталого стрічкового бандажа [5] з параметрами:  $E = 196$  ГПа;  $\nu = 0,3$ ;  $G = 0,5E/(1+\nu)$ ;  $R = 0,6$  м;  $h = 3$  мм. Відповідно до співвідношень (1) були розглянуті (за умови  $d = 8$  мм) чотири варіанти розмірів розрахункової періодичної області  $\Omega$  бандажа:

- 1)  $a : b : c : d = 3 : 5 : 1 : 2$ ;
- 2)  $a : b : c : d = 6 : 8 : 2 : 3$ ;
- 3)  $a : b : c : d = 3 : 4 : 1 : 2$ ;
- 4)  $a : b : c : d = 6 : 6 : 2 : 3$ .

У результаті чисельного розв'язування задачі на ПЕОМ для варіанта 1 побудована пружна поверхня розрахункової ділянки  $\Omega$  бандажа (рис. 2).

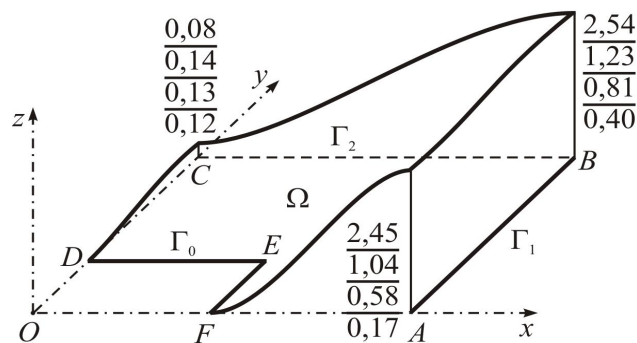


Рис. 2. Пружна поверхня розрахункової ділянки  $\Omega$  бандажа

По осі  $z$  на рис. 2 відкладені значення зведеного прогину:

$$w^* = \frac{E_x h^3}{q a^4} w. \quad (8)$$

Біля точок  $A, B$  і  $C$  наведені числа, що відповідають значенням  $w^*$  у цих точках для варіантів 1...4.

У разі збільшення товщини  $h$  від 3 до 6 мм максимальна величина прогину  $w_{\max}^*$  для кожного з розглянутих варіантів збільшується на 20...25 % (напруження змінюються не більше як на 10 %). При збільшенні радіуса  $R$  від 0,5 до 1 м значення прогинів і напружень змінюються не більше як на 4 %,

що дозволяє виконувати розрахунок бандажа, розглядаючи його як пластину [3; 4]. На рис. 3 і 4 для варіанта 3 наведені побудовані лінії рівня зведених головних напружень

$$\sigma_i^* = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_i; \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

на внутрішній (найбільш напруженій) поверхні розрахункової ділянки бандажа. Цифри на кривих позначають величину  $100\sigma_i^*/16$ .

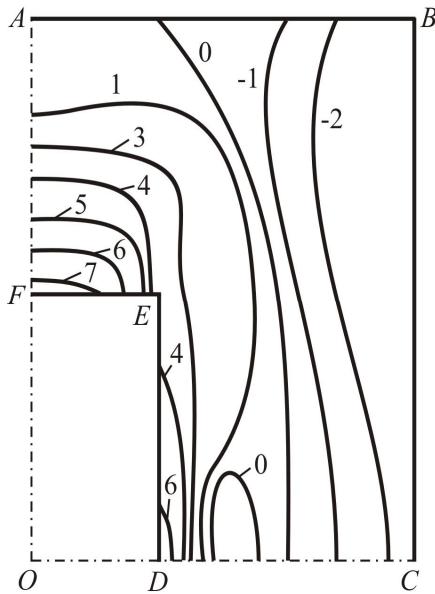


Рис. 3. Лінії рівня величини  $\sigma_1^*$

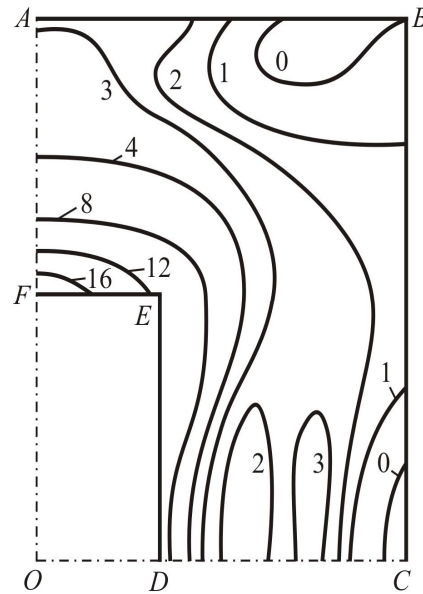


Рис. 4. Лінії рівня величини  $\sigma_2^*$

У таблиці для всіх варіантів наведені значення величин  $\sigma_1^*$  (чисельник) і  $\sigma_2^*$  (знаменник) у деяких точках досліджуваної періодичної області  $\Omega$  бандажа.

Т а б л и ц я

Значення величин  $\sigma_1^*$  і  $\sigma_2^*$  у точках досліджуваної області  $\Omega$

Точки Варіанти	A	B	C		E	
1	$\frac{-0,05}{0,0}$	$\frac{-0,16}{0,0}$	$\frac{-0,23}{0,11}$	$\frac{1,41}{1,94}$	$\frac{1,24}{3,31}$	$\frac{2,33}{5,62}$
2	$\frac{-0,1}{0,0}$	$\frac{-0,25}{0,0}$	$\frac{-0,38}{0,14}$	$\frac{1,51}{1,58}$	$\frac{1,03}{2,44}$	$\frac{2,31}{4,33}$
3	$\frac{0,00}{0,46}$	$\frac{-0,44}{0,0}$	$\frac{-0,36}{-0,09}$	$\frac{1,09}{1,34}$	$\frac{0,58}{1,89}$	$\frac{1,20}{2,98}$
4	$\frac{0,00}{0,22}$	$\frac{-0,45}{0,0}$	$\frac{-0,44}{-0,04}$	$\frac{0,90}{1,29}$	$\frac{0,43}{1,40}$	$\frac{0,89}{1,64}$

Графіки напружень  $\sigma_i^*$  на контурі FED прямокутного отвору представлені на рис. 5 і 6.

На закінчення наведемо для порівняння деякі результати чисельних розрахунків бандажів із прямокутними отворами, виконаних на базі технічної теорії згину пластин у працях [3] і [4]. Так, для бандажа з розмірами варіанта 3 отримані значення величин  $\sigma_{1\max}^*$  і  $\sigma_{2\max}^*$  відрізняються від величин, вказаних у праці [3] ( $\sigma_{1\max}^* = 1,6$ ;  $\sigma_{2\max}^* = 2,56$ ), на 25 і 14 %. А для бандажа (за умови  $\nu = 0,38$ ) з розмірами варіанта 1 значення  $\sigma_1^*$  і  $\sigma_2^*$  (табл.) у точці E відрізняються від відповідних результатів, наведених у праці [4] ( $\sigma_1^* = 1,39$ ;  $\sigma_2^* = 2,91$ ), на 11 і 12 %.

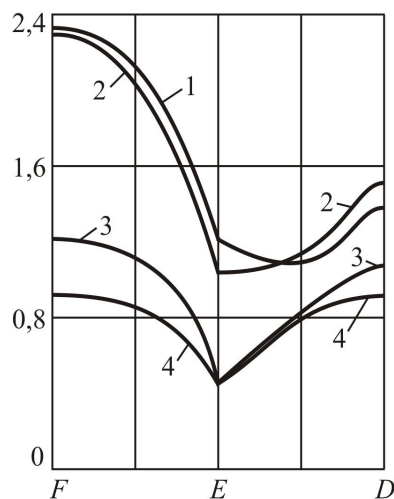


Рис. 5. Графіки величини  $\sigma_1^*$

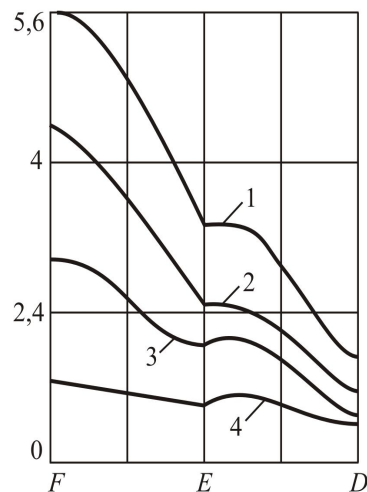


Рис. 6. Графіки величини  $\sigma_2^*$

При цьому найбільш напруженою областю розрахункової періодичної ділянки бандажа є або окіл точки  $E$ , відповідно до результатів [4], або середина краю  $FE$ , згідно з [3]. Тоді як із графіків рис. 5 і 6 випливає, що величини  $\sigma_{i\max}^*$  ( $i=1, 2$ ) перебувають в одній точці  $F$ .

Для з'ясування зазначеної невідповідності були розглянуті випадки бандажа с періодичною системою круглих [5], еліптичних і овальних отворів. Проведене на основі більш точної розрахункової моделі бандажа дослідження свідчить про те, що точка  $F$  є найбільш напруженою точкою розрахункової ділянки для всіх розглянутих випадків геометричної форми отворів.

Слід також зазначити, що неврахування кривини оболонки може дати невірні результати за деяких значень параметра  $\rho$ :

$$\rho = \frac{c+d}{2\sqrt{Rh}}. \quad (10)$$

Звертаємо увагу, що в області  $0,1 \leq \rho \leq 0,4$  урахування кривини бандажа вносить до результатів [4] поправку, яка не перевищує 25%. Ця обставина й дозволила автору праці [4] у розрахунку напруженого стану оболонкових бандажів лопаток парових турбін розглядати досліджуваний бандаж як пружну пластину.

### Висновки

За допомогою створеної програмної розробки, що реалізує запропонований чисельно-аналітичний RVR-метод, виконано чисельне розв'язування важливої прикладної задачі у дослідженні напруженого стану ослабленого з технологічних міркувань періодичною системою чималих прямокутних вирізів циліндричного бандажа – відповідального елемента парової турбіни, що знаходиться під дією відцентрового навантаження.

Проведено аналіз отриманих чисельних результатів, які представляють теоретичний і науковий інтерес для інженерної практики; розглянуто вплив розмірів отвору на рівень концентрації напружень в розрахунковій ділянці стрічкового бандажа.

Наведені результати підтверджують можливість ефективного використання запропонованого в монографії [1] науково обґрунтованого універсального RVR-методу розрахунку напружено-деформованого стану статично навантажених оболонкових пружних елементів конструкцій.

Достовірність отриманих у роботі результатів установлена шляхом їхнього зіставлення з відомими в науковій літературі чисельними даними інших авторів. Надійним засобом перевірки одержуваних результатів може бути використаний програмний алгоритм інтегрального двоїстого оцінювання чисельних розв'язків, що дозволяє автоматизувати пошук такої кількості апроксимацій, за якої процес збіжності розв'язків набуває усталеного характеру.

**Список використаних джерел**

1. Сало, В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями [Текст] : монография / В. А. Сало. – Х. : НТУ “ХПИ”, 2003. – 216 с.
2. Прочность паровых турбин [Текст] : монография / Л. А. Шубенко-Шубин и др. – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.
3. Зюзько, М. П. О напряжениях в бесконечной полосе, защемленной по краям периодически расположенными прямоугольными отверстиями [Текст] / М. П. Зюзько // Изв. вузов. Машиностроение. – 1963. – № 11. – С. 33–36.
4. Хворост, В. А. Изгиб бесконечной полосы с периодически расположенными отверстиями [Текст] / В. А. Хворост // Динамика и прочность машин : сб. науч. тр. ХПИ. – Х. : ХПИ, 1973. – Вып. 18. – С. 123 – 130.
5. Сало, В. А. Расчет напряженного состояния упругой оболочки с периодической системой круглых отверстий [Текст] / В. А. Сало, А. В. Корниенко // Сборник научных трудов НАКУ “ХАИ”. – Х., 2011. – Вып. 1 (65). – С. 76 – 82.
6. Пелех, Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [Текст] : монография / Б. Л. Пелех. – К. : Наук. думка, 1973. – 246 с.

*Стаття надійшла до редакції 02.11.2012 р.*