

УДК 539.3

В. А. Сало, П. О. Чупахін

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЕЛЕМЕНТА
КОНСТРУКЦІЇ СУЧАСНОЇ ТЕХНІКИ

Запропоновано новий метод визначення напружено-деформованого стану пружних елементів конструкцій сучасної техніки. Чисельно-аналітичний RVR-метод, що використовується в роботі, ґрунтується на варіаційному принципі Рейсснера, методі І. М. Векуа, теорії R-функцій та загальних рівняннях тривимірної теорії пружності. Ефективність методу показана на конкретному прикладі. Представлено чисельні результати розрахунку періодичної ділянки циліндричної панелі для різних значень геометричних параметрів.

К л ю ч о в і с л о в а: пружна оболонка, міцність та жорсткість, концентрація напружень.

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень. Задачі розрахунку напружено-деформованого стану циліндрів під дією довільного статичного навантаження викликають значний практичний інтерес у випадку дослідження відповідальних оболонкових елементів конструкцій у різних галузях техніки. Аналіз і оцінювання міцності та жорсткості широко застосовуваних у сучасній інженерній та військовій практиці оболонкових елементів конструкцій припускають їх розрахунок на основі розв'язань відповідних крайових задач теорії пружності. Ускладнення форм пружних конструкцій техніки, зокрема військової, зумовлюють необхідність розвитку механіки пружних оболонок та побудови їх уточнених моделей.

У науковій літературі накопичений значний обсяг матеріалу з чисельних методів розрахунку пружних оболонок та розроблено велику кількість різноманітних і нерідко суперечних варіантів прикладних теорій оболонок. Розроблення ефективних та надійних методів розрахунку на міцність і жорсткість пружних оболонкових елементів є актуальною проблемою, розв'язання якої має важливе наукове й практичне значення. Для розв'язання цієї проблеми пропонується використовувати ефективний чисельно-аналітичний RVR-метод [1], що ґрунтується на застосуванні варіаційного принципу Рейсснера, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності, методу І. М. Векуа і математичного апарату теорії R-функцій [2], за допомогою яких на аналітичному рівні враховується геометрична інформація крайових задач і будуються структури розв'язків, що точно задовольняють усім крайовим умовам тривимірної задачі.

Виклад основного матеріалу. Одним з важливих етапів дослідження і створення нових звивальних машин металокордового виробництва є розрахунок їхніх роторів на міцність. Досліджуваний сталевий ротор конструктивно виконаний із скріплених гвинтами твердих циліндричних елементів, з'єднаних між собою трьома тонкостінними циліндричними панелями (рис. 1).

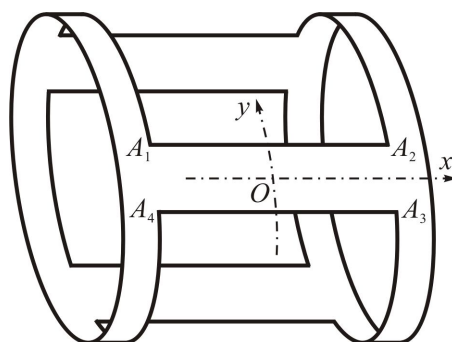


Рис. 1. Досліджуваний ротор з циліндричними панелями

Визначення напружено-деформованого стану зазначеного ротора зводиться, по суті, до розрахунку циліндричної панелі $A_1A_2A_3A_4$, контури A_1A_4 і A_2A_3 якої вважаються жорстко защемленими, а контури A_1A_2 і A_3A_4 – вільними від зовнішніх зусиль і моментів. Основним навантаженням, що

сприймається обертовою панеллю, є рівномірно розподілене навантаження інтенсивності

$$q = \rho \omega^2 R h, \quad (1)$$

де ρ і ω – щільність матеріалу і кутова швидкість обертання пружної циліндричної оболонки; h і R – товщина оболонки і радіус кривизни її середньої поверхні.

У реальній конструкції ротора в кутових точках A_1, A_2, A_3, A_4 (концентраторах напружень) циліндричної панелі є галтельні закруглення, тому чисельний розрахунок слід виконувати із урахуванням впливу величини радіуса галтель на напружено-деформований стан пружної панелі.

Досліджувану крайову задачу можна розглядати як задачу періодичну, тому що у випадку жорсткого защемлення контурів A_1A_4 і A_2A_3 (див. рис. 1) виключається взаємний вплив циліндричних панелей, періодично розташованих уздовж напрямної оболонки ротора. Для з'ясування питання про згаданий вплив достатньо (згідно з властивостями симетрії панелі щодо площин $x=0, y=0$) виконати чисельний розрахунок пружної області Ω – ділянки $ABCDE$ циліндричної панелі (рис. 2).

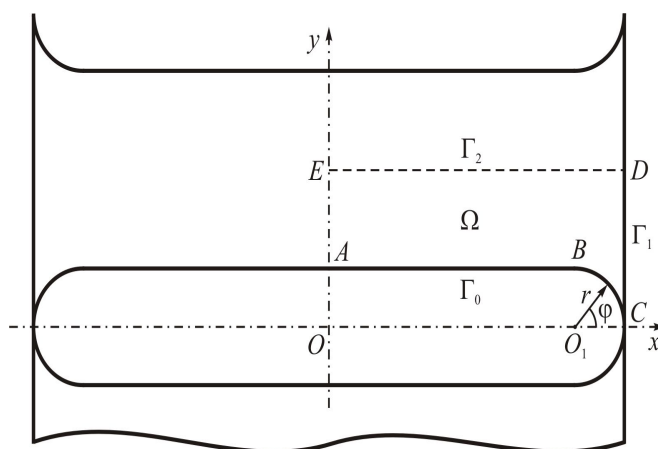


Рис. 2. Досліджувана область Ω циліндричної панелі ротора

Розглянемо рівновагу області Ω циліндричної панелі з границями ABC (Γ_0), CD (Γ_1), DE (Γ_2) і EA . Нехай $OC = a$, $CD = b$, $OO_1 = c$, $O_1B = O_1C = r$. Функції ω_1 і ω_2 , що визначають границі Γ_1 і Γ_2 відповідно, мають вигляд:

$$\omega_1 = 1 - (x/a)^2; \quad \omega_2 = 1 - (y/b)^2. \quad (2)$$

Функція ω_0 ($\omega_0 = 0$ – рівняння границі Γ_0) математично визначатиметься за допомогою R -операцій [2] за формулою:

$$\omega_0 = \omega_3 \vee_0 \omega_4 \wedge_0 (\omega_5 \omega_6), \quad (3)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= [x/c]^2 - 1; & \omega_5 &= [(x-c)/r]^2 + [y/r]^2 - 1; \\ \omega_4 &= [y/r]^2 - 1; & \omega_6 &= [(x+c)/r]^2 + [y/r]^2 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Шукані функції – незалежні між собою узагальнені переміщення $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$ і узагальнені зусилля $N_x, N_y, S, M_x, M_y, H, Q_x$ і Q_y теорії оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю. Залежності між уведеними узагальненими зусиллями і компонентами тензора напружень σ представимо у вигляді співвідношень:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{h} + \frac{12zM_x}{h^3}; & \sigma_y &= \frac{N_y}{h} + \frac{12zM_y}{h^3}; & \tau &= \frac{S}{h} + \frac{12zH}{h^3}; \\ \sigma_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right); & \sigma_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Граничні умови на жорстко защемленій границі Γ_1 :

$$u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (6)$$

Умови періодичності розв'язку на границі Γ_2 :

$$v = S = Q_y = \gamma_2 = H = 0. \quad (7)$$

Граничні умови на вільному від зусиль і моментів контурі Γ_0 :

$$N_{vv} = N_{v\tau} = M_{vv} = M_{v\tau} = Q_n = 0. \quad (8)$$

Формули, що зв'язують внутрішні зусилля й моменти $N_{vv}, N_{v\tau}, \dots, Q_n$ в похилих перетинах і перетинах $x = \text{const}, y = \text{const}$ (N_x, N_y, \dots, Q_y), представлені в роботі [1] і мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} f_1^2 N_x + 2f_1 f_2 S + f_2^2 N_y &= 0; \\ f_1 f_2 (N_y - N_x) + (f_1^2 - f_2^2) S &= 0; \quad f_1^2 M_x + 2f_1 f_2 H + f_2^2 M_y = 0; \\ f_1 f_2 (M_y - M_x) + (f_1^2 - f_2^2) H &= 0; \quad f_1 Q_x + f_2 Q_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При цьому для контуру Γ_0 справедливі співвідношення:

$$f_1 = -\cos \varphi = \frac{\partial \omega_0}{\partial x}; \quad f_2 = -\sin \varphi = \frac{\partial \omega_0}{\partial y}. \quad (10)$$

Наближені аналітичні розв'язки досліджуваної задачі, які точно задовольнятимуть заданим граничним умовам (6), (7) і (8), матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{1m} P_{2i+1} C_j; & v &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{2m} P_{2i} S_j; \\ w &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{3m} P_{2i} C_j; \\ N_x &= f_1 \Phi_1 \omega_7 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{1m} P_{2i} C_j; \\ N_y &= f_2 \Phi_1 \omega_7 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{2m} P_{2i} C_j; \\ S &= -f_1 f_2 \Phi_1 \omega_7 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{3m} P_{2i+1} P_{2j+1}; \\ Q_x &= f_2 \Phi_3 \omega_7 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{7m} P_{2i+1} P_{2j}; \\ Q_y &= -f_1 \Phi_3 \omega_7 + \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{8m} P_{2i} P_{2j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Вирази для шуканих функцій $\gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H$ будуть такими ж, як і вирази для функцій u, v, N_x, N_y, S у (11), якщо в останніх $A_{1m}, A_{2m}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, \Phi_1$ відповідно замінити на $A_{4m}, A_{5m}, B_{4m}, B_{5m}, B_{6m}, \Phi_2$:

$$\omega_7 = \omega_2 / (\omega_2 + \omega_0). \quad (12)$$

Величини $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{5m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{8m}$ – шукані сталі; P_{2i} і P_{2i+1} – поліноми Лежандра ступеня $2i$ й $2i+1$ щодо координати x ; $m = i(n_2 + 1) + j + 1$;

$$C_j = \cos \frac{j\pi}{b} y, \quad S_j = \sin \frac{(j+1)\pi}{b} y. \quad (13)$$

Координатні послідовності Φ_k ($k = 1, 3$) беруться у вигляді:

$$\Phi_k = \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_4} \Phi_{ki} P_{2i} C_j, \quad (14)$$

де Φ_{ki} – сталі, що підлягають визначенню; $t = i(n_4 + 1) + j + 1$.

Підставляючи (11) у варіаційне рівняння Рейсснера і обчислюючи за допомогою високоточних квадратурних формул Гауса відповідні інтеграли, зводимо розв'язання сформульованої крайової задачі до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих сталих на базі програмної розробки для ПЕОМ, написаної на алгоритмічній мові Borland Pascal.

Чисельна реалізація задачі. Розглянемо циліндричну панель досліджуваного ротора [3], для якої фізичні та геометричні параметри мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} E &= 194 \text{ ГПа}; & \nu &= 0,3; & G &= 0,5E/(1+\nu); \\ \rho &= 7,85 \text{ г/см}^3; & h &= 0,4 \text{ см}; & b &= 1,75 \text{ см}; & r &= 0,2 \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Чисельні розрахунки були виконані для двох варіантів:

$$1) R = 9,2 \text{ см}; \quad a = 6,25 \text{ см}; \quad c = 5 \text{ см}; \quad (16)$$

$$2) R = 10,3 \text{ см}; \quad a = 8,5 \text{ см}; \quad c = 7,3 \text{ см}. \quad (17)$$

Для варіанта 1 (16) на рис. 3 (цифри на кривих позначають величину радіуса галтелі r в см) показаний розподіл відносних мембранних $k_1 = N_\varphi/qR$ (суцільні лінії) і максимальних за товщиною згинаючих $k_2 = 6M_\varphi/qRh$ (штрихові лінії) напружень уздовж контуру BC границі Γ_0 (див. рис. 2).

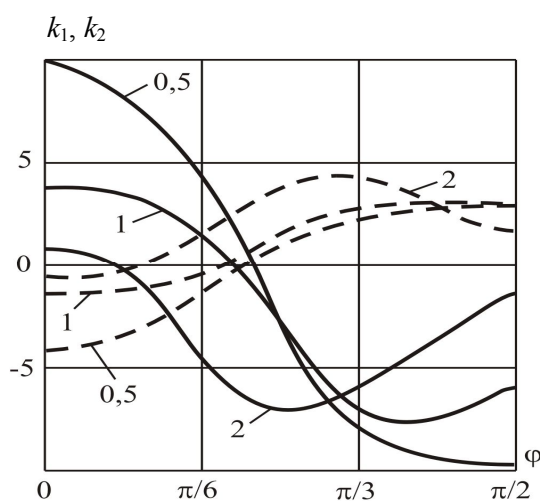


Рис. 3. Розподіл величин k_1 (суцільні лінії) і k_2 (штрихові лінії) уздовж контуру BC галтельного

У таблиці при $n = 1000$ об/хв для варіантів 1 (чисельник) і 2 (знаменник) залежно від величини радіуса r представлені значення прогину w в точках A і E розрахункової періодичної ділянки, а також значення σ_{\max} на контурі CD :

$$\sigma_{\max} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2| \}. \quad (18)$$

Т а б л и ц я

Значення прогину w та напруження σ_{\max}

r , см	0,1	0,75	1,5	2	2,5
w_A , мкм	$\frac{14,2}{52,1}$	$\frac{13,5}{45,0}$	$\frac{11,7}{37,7}$	$\frac{9,74}{29,5}$	$\frac{7,09}{19,5}$
w_E , мкм	$\frac{14,1}{51,9}$	$\frac{13,3}{45,0}$	$\frac{11,6}{37,8}$	$\frac{9,73}{29,7}$	$\frac{7,45}{19,9}$
σ_{\max} , МПа	$\frac{15,7}{32,7}$	$\frac{14,6}{31,0}$	$\frac{13,2}{26,0}$	$\frac{11,5}{20,8}$	$\frac{9,66}{17,0}$

Результати, наведені у таблиці, свідчать про помітний вплив величини радіуса закруглення r на напружено-деформований стан розрахункової області панелі. При збільшенні радіуса r знижується

рівень напружень, а точка, у якій прогин w досягає свого максимального значення, поступово переміщається уздовж контуру AE із точки A в точку E . Залежно від товщини h на рис. 4 представлені для варіантів 1 (16) і 2 (17) графіки прогину w_A (суцільні лінії) в точці A і напруження σ_{\max} (штрихові лінії) при $r=2$ см та $n=1000$ об/хв. Оскільки через лінійну постановку задачі розв'язки (11) пропорційні квадрату кутової швидкості (1), тому, маючи результати для конкретного значення n достатньо просто одержати кількісну інформацію про міцність оболонки для довільної величини n .

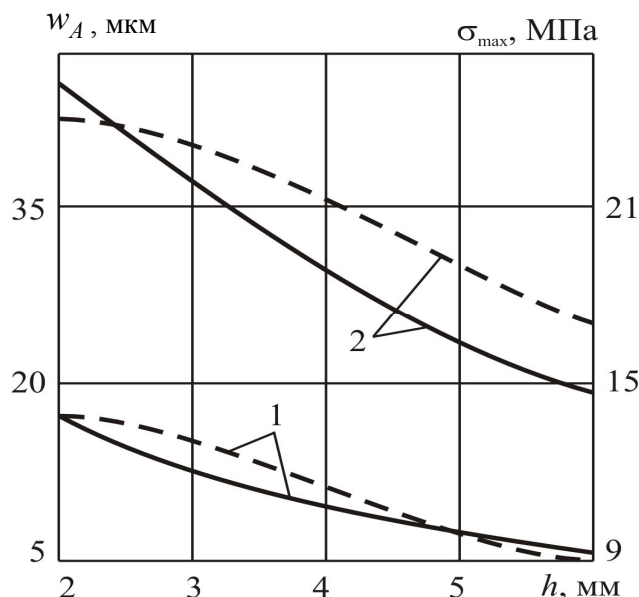


Рис. 4. Графіки прогину w_A в точці A (суцільні лінії) і напруження σ_{\max} (штрихові лінії)

Висновки

Задачі розрахунку напружено-деформованого стану циліндрів під дією відцентрових навантажень мають значний теоретичний і практичний інтерес у різних галузях сучасної техніки. В роботі за допомогою комп'ютера виконано чисельне розв'язання важливої прикладної задачі у дослідженні ослабленої з технологічних міркувань прямокутним вирізом циліндричної панелі – важливого елемента ротора; розглянуто вплив величини радіуса галтельного закруглення на напружено-деформований стан розрахункової області пружної панелі. Проведено аналіз отриманих результатів, що мають науковий інтерес для інженерної практики.

Список використаних джерел

1. Сало, В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями [Текст] : монография / В. А. Сало. – Х. : НТУ “ХПИ”, 2003. – 216 с.
2. Рвачев, В. Л. Методы алгебры логики в математической физике [Текст] / В. Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1974. – 260 с.
3. Сало, В. А. Напряженно-деформированное состояние упругой цилиндрической панели с отверстием [Текст] / В. А. Сало, П. И. Литовченко, И. В. Чижигов // Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. – Х., 2011. – Вып. 1 (65). – С. 63–70.

Стаття надійшла до редакції 24.01.2012 р.