УДК 621. 438.621.515

О. М. Кириченко, В. П. Раківненко, Л. А. Гребеник

АНАЛІЗ ГІПОТЕЗ І ПРИПУЩЕНЬ У ПРИКЛАДНОМУ МЕТОДІ РОЗРАХУНКУ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Наведено аргументовані докази придатності запропонованого прикладного метода розрахунку несучої здатності багатошарових конструкцій.

К л ю ч о в і с л о в а: багатошарова оболонка, гіпотези Кірхгофа – Лява та Тимошенка, зведена жорсткість.

Постановка проблеми. У роботі [1] запропоновано прикладний метод розрахунку несучої здатності багатошарових тонкостінних оболонок і пластин. Метод математично доступний і наочний, ураховує всі специфічні властивості тонкостінних багатошарових конструкцій.

Проте будь-який прикладний метод потребує вагомого обґрунтування, оскільки базується, головним чином, на гіпотезах і чіткому розумінні фізичних явищ, які відбуваються у багатошарових конструкціях у випадку їх навантаження.

Виклад основного матеріалу. Основні положення даного метода [1] полягають у тому, що розрахунки проводяться в два етапи з використанням тих чи інших гіпотез.

На *першому етапі* багатошарова конструкція розглядається як єдиний пакет. Користуючись "жорсткими" гіпотезами Кірхгофа – Лява, на їх основі у тривісному пакеті в серединній площині визначають нормальні і дотичні напруження двовісного напруженого стану. З умов рівноваги частини багатошарового пакета за його товщиною знаходять поперечні нормальні напруження, що визначають число (характеристику несучої здатності). Надалі жорсткість багатошарової стінки на згин знаходять шляхом введення поправок, пов'язаних з деформацією зсуву і надавлюванням волокон у маложорстких шарах, виходячи з фізичного представлення роботи багатошарового пакета. Ці поправки вносять у звичайний вираз згінної жорсткості, отриманий згідно з гіпотезами Кірхгофа – Лява для всієї стінки.

Таким чином, формули жорсткості багатошарової стінки на розтяг і згин набирають вигляду:

$$B_{м} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \left(z_i - z_{i-1} \right)}{1 - \mu^2},$$

$$D_{м} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \left(z_i^3 - z_{i-1}^3 \right)}{3(1 - \mu^2)}, \qquad (1)$$

де E_i – модуль пружності 1-го роду i-го шару; μ – коефіцієнт Пуассона; z_i – поперечна координата i-го шару; $i = 1, 2, 3, \ldots n$ – кількість шарів в пакеті.

На *другому етапі* розрахунку визначається зведена згинна жорсткість $D_{зв}$ (з урахуванням деформацій зсуву і обтиску), для чого застосовують відомий прийом С. П. Тимошенка [2] для визначення додаткових прогинів балки під дією поперечних сил, що дозволяє звести багатошарову конструкцію до еквівалентної одношарової. За принципом суперпозиції згинні жорсткості знаходять окремо для несучих і маложорстких шарів. Отже, вираз зведеної згинної жорсткості має вигляд:

$$D_{зв} = D + \frac{D_{м} - D}{\lambda}, \qquad (2)$$

де $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \cdot \delta^3}{12(1 - \mu^2)}$ – сума власних згинних жорсткостей несучих шарів; δ_i – товщина i-го несучого шару; λ – параметр, який враховує деформації зсуву і обтиску наповнювачів [1].

Залежність (2) є *основним* розрахунковим виразом для розв'язування різноманітних задач щодо багатошарових оболонок (пластин, панелей). За наявності готового розв'язку для одношарової конструкції достатньо жорсткості на розтяг і стиск замінити відповідними зведеними жорсткостями багатошарової стінки.

Оскільки метою статті є аналіз достовірності запропонованого прикладного методу розрахунку багатошарових тонкостінних конструкцій, надалі розглядаються різні напрями його обґрунтування.

© О. М. Кириченко, В. П. Раківненко, Л. А. Гребеник

Перший напрям – порівняння розрахунків, отриманих за прикладним методом, що пропонується, з даними точного розв'язування.

Розглядаючи як приклад осесиметричну форму втрати стійкості стиснутої в осьовому напрямку багатошарової циліндричної оболонки з вільно обпертими краями, запишемо вираз для критичного погонного зусилля:

$$N_{кр} = \frac{B_м(1-\mu^2)}{R^2 \cdot \alpha^2} + D_{кр} \cdot \alpha^2, \tag{3}$$

де $\alpha = \frac{m\pi}{L}$; L – довжина оболонки; m – кількість напівхвиль деформації вздовж твірної, які визначаються з умови мінімуму $N_{кр}$; R – середній радіус багатошарової оболонки; μ – коефіцієнт Пуассона, який для простоти розрахунків вважається однаковим для всіх шарів.

Розрахунки і на їх основі графічні залежності виконані для дво- і тришарових оболонок.

Для двошарової оболонки (рис. 1) параметри формули (3) мають вигляд:

$$B_м = \frac{1}{1-\mu^2}\left(E \cdot \delta + E_н \cdot H\right), \tag{4}$$

$$D_{пр} = D + \frac{D_м - D}{1 + \alpha^2 \cdot \frac{A_з}{D_м \cdot G_н} + \alpha^4 \frac{A_н}{D_м \cdot E_н}}, \tag{5}$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \tag{6}$$

$$A_з = \frac{E_н^2}{4(1-\mu^2)^2} \cdot \int_{-h_1}^{n_2} \left(h_2^2 - y^2\right)^2 dy, \tag{7}$$

$$A_н = \int_{-h_1}^{n_2} \left(a - вy + cy^3\right)^2 dy, \tag{8}$$

$$a = \frac{B_н \cdot h_2^3}{3H}\left(1 - \frac{3D_м}{B_м \cdot h_2^2}\right), \tag{9}$$

$$в = \frac{B_н \cdot h_2^2}{2H}\left(1 - \frac{2D_м}{B_м \cdot h_2^2}\right), \tag{10}$$

$$c = \frac{B_н}{6H}, \tag{11}$$

$$B_н = \frac{E_н \cdot H}{1-\mu^2}. \tag{12}$$

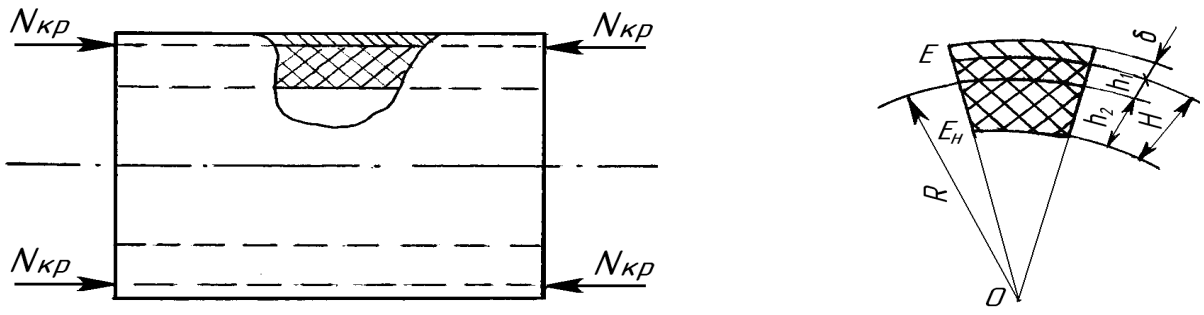

Рис. 1. Двошарова конструкція

Для тришарової оболонки симетричної структури $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ (рис. 2) параметри формули (3) такі:

$$A_з = \frac{B^2 H}{4G_н}(H+\delta)^2, \tag{13}$$

$$A_н = \frac{B^2 H^2}{48E_н}(H+\delta)^2, \tag{14}$$

$$D_м = 2D + \frac{B}{2}(H+\delta)^2, \tag{15}$$

$$B = \frac{E\delta}{1-\mu^2}. \tag{16}$$

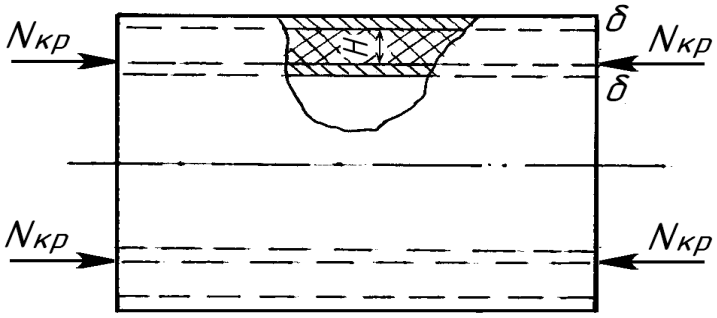

Рис. 2. Тришарова конструкція

Надалі, згідно з розрахунками за формулами (3–6), за спеціальною комп'ютерною програмою для декількох значень $\frac{R}{\delta}, \frac{E_н}{E}, \frac{G_н}{E}$ при μ = 0,4 знайдено значення критичних зусиль стиску дво- і тришарових оболонок, які на рис. 3 та 4 показані у вигляді графічних залежностей $\frac{N_{кр}}{E\cdot\delta}\cdot 10^3 = f\left(\frac{H}{\delta}\right)$.

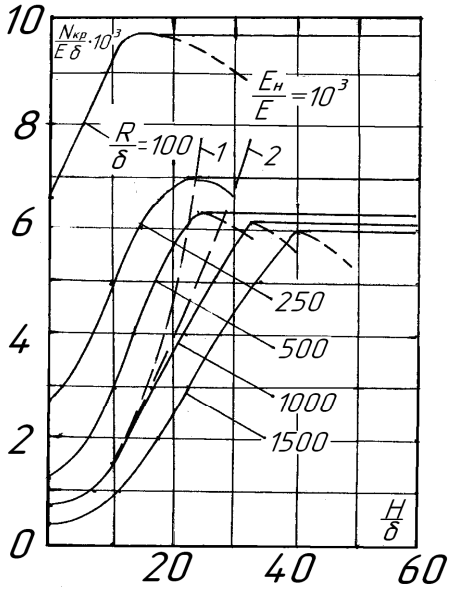

Рис. 3. Несуча здатність двошарової конструкції

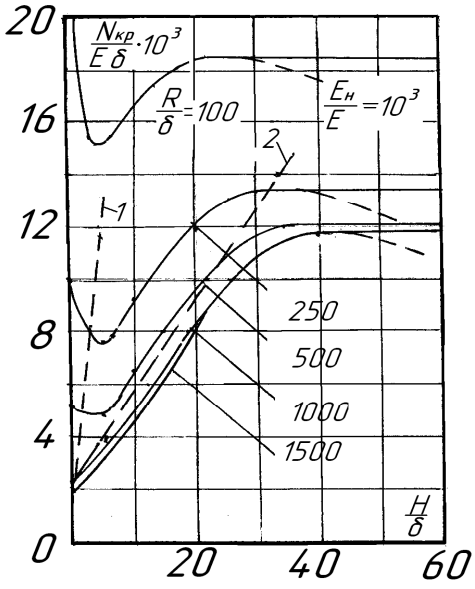

Рис. 4. Несуча здатність тришарової конструкції

Аналізуючи отримані результати, можна дійти таких висновків.

1. За наявності наповнювача, навіть малої жорсткості, значно зростають критичні зусилля $N_{кр}$ завдяки тому, що наповнювач як підкріплюючий шар разом з несучим утворює велику згинну жорсткість $D_м$.

2. Як видно з наведених графіків (див. рис. 4), для тришарових оболонок з маложорстким наповнювачем за малих значень $\frac{H}{\delta}$ спостерігається спадання критичних зусиль $N_{кр}$. Воно пов'язане з великими деформаціями зсуву наповнювача, які настільки знижують жорсткість стінки, що вона стає меншою за жорсткість нерознесених несучих шарів (при $H = 0$). Такий результат отримано і в інших роботах, наприклад, [3].

3. Граничне значення модуля пружності наповнювача $E_н$, нижче якого за невеликих $\frac{H}{\delta}$ спостерігатиметься спадання критичного зусилля, знаходиться з екстремуму $N_{кр}$:

$$\frac{dN_{кр}}{dH} = 0.$$

Після нескладних перетворень маємо

$$E_{H_{\min}} = 0{,}65 \cdot \frac{E \cdot \delta}{R^2} \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}. \qquad (17)$$

4. З графіків також видно, що збільшення $\frac{H}{\delta}$ призводить до стрімкого зростання $N_{кр}$ до максимального значення, після якого спостерігається таке ж різке падіння критичних зусиль (на рис. 3, 4 спадаючі ділянки зображені пунктирними лініями). Між тим зрозуміло, що в дійсності $N_{кр}$ повинні весь час зростати. Але це зростання обмежене, тому що частина наповнювача, яка достатньо віддалена від несучих шарів, не сприймає навантаження. В тій частині зміни $\frac{H}{\delta}$, де $N_{кр}$ починають спадати, критичні зусилля вважаються постійними і дорівнюють їх максимальному значенню.

Зауважимо, що за невеликих товщин наповнювача, як видно з розрахунків, мінімуму критичного зусилля відповідає утворення порівняно довгих хвиль деформації, величина яких у багато разів більша товщини наповнювача. У випадку великих товщин наповнювача утворюються короткі хвилі, співрозмірні з його товщиною. Вплив надавлювання різко зростає у разі утворення коротких хвиль.

5. З графиків (див. рис. 3, 4) можна зробити висновок, що з точки зору ваги тришарова конструкція не завжди більш вигідна, ніж двошарова. В області малих значень $\frac{H}{\delta}$ для тришарової оболонки має місце спадання критичних зусиль, а для двошарової – зростання. В області великих значень $\frac{H}{\delta}$ – навпаки.

Другий напрям – обґрунтування правомірності застосування гіпотез у побудові математичної моделі прикладного методу. Використовуючи наведені графіки, можна наочно показати вплив окремих факторів на критичне навантаження.

1. На рис. 3, 4 для $\frac{E_н}{E} = 1 \cdot 10^{-3}$ та $\frac{R}{\delta} = 1000$ зображено по дві додаткові штрихпунктирні лінії. Лінія 1 побудована на основі "жорстких" гіпотез Кірхгофа – Лява, лінія 2 – з урахуванням деформацій поперечного зсуву, але без урахування обтиску наповнювача. Порівняння основних і додаткових кривих дає підставу дійти таких висновків: до деякого значення $\frac{H}{\delta}$ розрахунки можливо проводити без урахування деформацій зсуву і обтиску; за великих значень $\frac{H}{\delta}$ суттєвий

вплив має лише деформація зсуву; нарешті, за досить великих значень $\frac{H}{\delta}$, яким відповідають критичні зусилля, що близькі до граничних, вирішального впливу мають деформації надавлювання волокон. Таким чином, в широкому діапазоні значень $\frac{H}{\delta}$ деформації обтиску фактично не впливають на величину $N_{кр}$.

2. Як відзначалося, на першому етапі розрахунку розподілення напружень за товщиною стінки визначалося згідно з гіпотезами Кірхгофа – Лява. У процесі виведення розрахункових формул, застосовуючи інтеграли Мора, згладили неточності закону розподілення напружень.

3. На рис. 5 зображені епюри розподілення додаткових напружень, які виникають у тришаровій стінці у разі її критичного навантаженя.

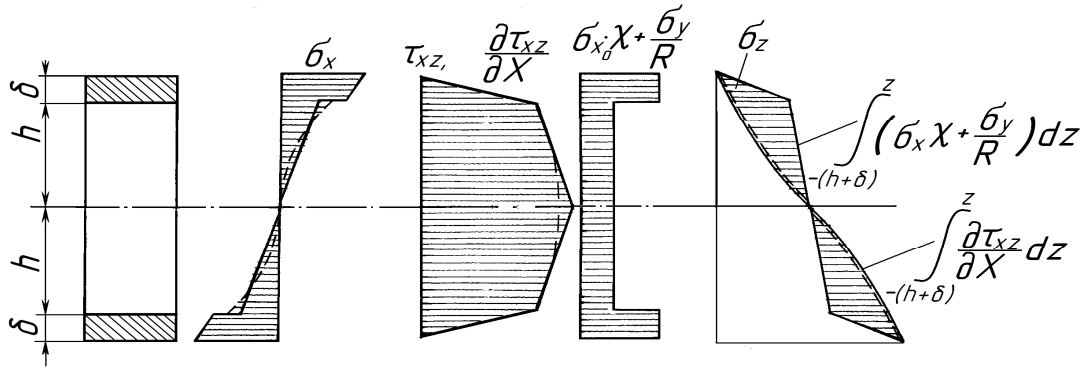

Рис. 5. Розподіл напружень у тришаровій стінці

Суцільними лініями показані епюри напружень, побудованих згідно з гіпотезами Кірхгофа – Лява, пунктирними – дійсні, що отримані на основі точних рішень. Як видно з рис. 5, уточнення розподілення згінних σ_x і дотичних τ_{xz} напружень призводить на одних ділянках до деякого збільшення, на інших – до зменшення їх величин. Внаслідок цього при визначенні інтегралів Мора для цих напружень з використанням точних і наближених епюр результати практично співпадають. Щодо нормальних напружень обтиску наповнювача σ_z, то для них уточнена епюра відображає дещо менші значення. Отже, член, який враховує обтиск, завищує величину зведеної жорсткості $D_{зв}$ порівняно з її точним значенням. Цим пояснюється спадання критичних зусиль для відносно великих товщин наповнювача (див. рис. 3, 4). З іншого боку, як було показано вище, в широкому діапазоні зміни $\frac{H}{\delta}$ вплив деформації обтиску є незначним. Тому неточність знаходження напружень обтиску впливає лише на максимальні критичні зусилля, дещо їх знижуючи.

Висновок

Таким чином, запропонований прикладний метод розрахунку з достатньою точністю дозволяє відносно просто розв'язувати задачі несучої здатності багатошарових оболонок і пластин.

Список використаних джерел

1. Кириченко, О. М. Прикладний метод розрахунку несучої здатності багатошарових оболонок [Текст] / О. М. Кириченко, В. П. Раківненко // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. – 2009. – Вип. 80. – С. 262 – 270.

2. Тимошенко, С. П. Устойчивость упругих систем [Текст] / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965.

3. Григолюк, Э. И. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, Е. А. Коган. – М. : НГУ, 2000.

Стаття надійшла до редакції .29.04.2011р.