УДК 539.3

О. М. Кириченко **В. П. Раківненко** **П. М. Калінін**

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ КОНСТРУКТИВНО ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК МІНІМАЛЬНОЇ МАСИ

У статті розглядається задача оцінювання несучої здатності конструктивно ортотропних оболонок мінімальної маси, яка є актуальною для літальних апаратів. За методом малих параметрів визначається чисельний діапазон математичного сподівання критичного навантаження оболонок з урахуванням випадкових відхилень їх геометричних величин від проєктних значень. Отримані в статті теоретичні результати порівняно з експериментальними даними.

Ключові слова: конструктивно ортотропна оболонка, метод малих параметрів, розкид параметрів, імовірність працездатності.

Постановка проблеми. Питання високої надійності літальних апаратів (ракет, літаків, гвинтокрилів), основними силовими елементами яких є конструктивно ортотропні оболонки, завжди були серед найбільш актуальних.

Вимоги щодо зниження маси конструкції в загальному випадку протирічать, з одного боку, досягненню високої її надійності, з іншого, – завищений вибір коефіцієнта запасу статичної міцності приводить до переобтяження такого об'єкта.

У розрахунках критичних навантажень конструктор користується теоретичними детерміністськими залежностями, вважаючи, що компонувальна схема, геометричні або механічні дані є невипадковими (нормованими) величинами.

Насправді існує розкид фізико-геометричних параметрів конструкції, невизначеність поля навантаження і багато інших випадкових факторів, які у детерміністському підході врахувати неможливо.

Внаслідок цього непередбаченими можуть бути також критичні навантаження. Тому існує необхідність знати ймовірність знаходження цих параметрів у визначеному допустимому інтервалі. Вихід з нього інтерпретується як непрацездатність конструкції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наслідком впливу багатьох випадкових факторів на роботу конструкції є випадковий характер її напружено-деформованого стану, зокрема несучої здатності.

Розв'язування задач надійності в будівельній механіці є змістом значної кількості наукових праць, насамперед таких видатних вчених, як В. В. Болотін [1], С. Н. Кан [2]. У монографії [1] започаткована теорія ймовірності для оцінювання надійності споруд, основою яких є тонкостінні оболонки. В публікації [2] досліджена достатньо складна задача несучої здатності багатошарових оболонок мінімальної маси. Найбільш близькою до тематики, що розглядається, є стаття [3], в якій графо-аналітичним методом досліджується підхід до оптимізації оболонкових конструкцій з розкидом значень вихідних параметрів.

У статті, що пропонується, застосовано метод малих параметрів, який дозволяє, на відміну від методики, наведеної у праці [3], не обмежувати кількість варійованих параметрів з розкидом вихідних величин даних і визначати мінімум маси не в *області* розкиду вихідних даних, а в *діапазоні* аналітичних значень.

Метою статті є аналітичне вирішення задачі оцінювання несучої здатності конструктивно ортотропних циліндричних оболонок мінімальної маси у разі необмеженої кількості варійованих вихідних параметрів з урахуванням розкиду значень їх величин.

Виклад основного матеріалу. Відомо, що підкріплені оболонки надзвичайно чутливі до відхилень від проєктних значень геометричних параметрів. За невдалого підбору силового набору несуча здатність таких оболонок може виявитися навіть нижчою, ніж у відповідних гладких оболонок [4]. Задача полягає саме в тому, щоб конструкція була оптимальна за міцністю та масою.

Виконаємо розрахунок статичної стійкості конструктивно ортотропної циліндричної оболонки, що підкріплена в осьовому напрямку стрингерами, а у поперечному напрямку шпангоутами, під дією осьової стискаючої сили F (рис. 1) з урахуванням випадкових відхилень від проєктних розмірів і форм її елементів, тобто розв'яжемо задачу визначення чисельних значень критичного навантаження за чисельними характеристиками випадкових параметрів.

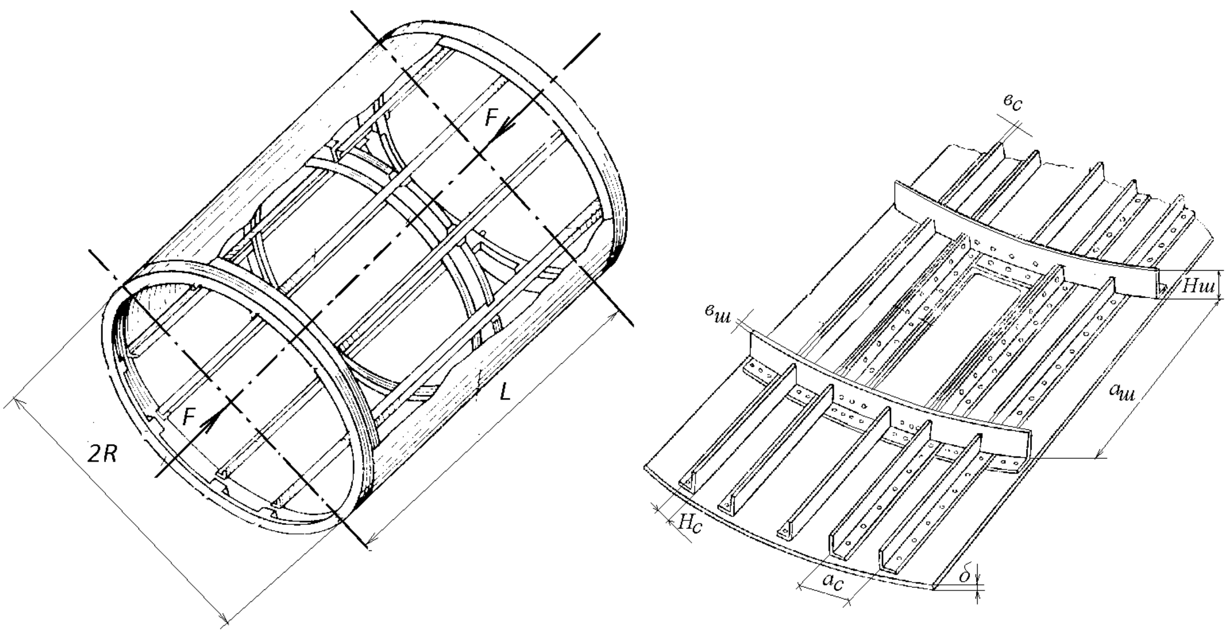

Рисунок 1 – Конструктивно ортотропна оболонка

Відповідно до мети дослідження для розв'язання задачі застосуємо метод малих параметрів. Якщо задана функціональна залежність

$$z = f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right), \tag{1}$$

то математичне сподівання m_z величини z запишемо у вигляді

$$m_z = \varphi\,(m_{x_1},\, m_{x_2},\, m_{x_3}, ...,\, m_{x_k}), \tag{2}$$

де m_{x_i} – математичне сподівання i-го $(i = 1, 2, ..., k)$ збуреного параметра. Формула середнього квадратичного відхилення S_z величини z з урахуванням того, що випадкові величини некорельовані і розподілені за законом, який близький до нормального, матиме такий вигляд:

$$S_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 \cdot S_{x_i}^2}, \tag{3}$$

де S_{x_i} – середнє квадратичне відхилення i-го збуреного параметра, а функція

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m$ означає, що похідні визначаються в околах математичних сподівань аргументів x_i.

Використаємо відомі залежності для критичних напружень $\sigma_{\text{кр}}^{a}$ та $\sigma_{\text{кр}}^{o}$ конструктивно ортотропних циліндричних оболонок [4]:

– для асиметричної форми втрати стійкості

$$\sigma_{\text{кр}}^{a} = \sqrt{\frac{4E^2 D_{\text{ш}}^*}{R^2 \delta_{\text{с}}}}\,; \tag{4}$$

– для осесиметричної

$$\sigma_{\text{кр}}^{o} = \sqrt{\frac{4E^2 D_{\text{с}}^* \cdot \delta_{\text{ш}}}{R^2 \delta_{\text{с}}}}\,, \tag{5}$$

де $D_{\text{с}}^*,\ D_{\text{ш}}^*$ – згинні жорсткості повздовжнього та поперечного перерізів з урахуванням стрингерів та шпангоутів відповідно, що віднесені до модуля пружності E;

$\delta_{\text{с}},\ \delta_{\text{ш}}$ – еквівалентні товщини оболонки в повздовжньому і поперечному напрямах відповідно.

Для силового набору (ребер – стрингерів і шпангоутів) прямокутного перерізу (рис. 1) жорсткісно-геометричні характеристики визначають такі залежності:

$$\begin{gathered}
\frac{D_{\text{с}}^*}{R^2} = \frac{1}{12\left(1-\mu^2\right)} \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_{\text{с}}}{a_{\text{с}}} \cdot \frac{H_{\text{с}}}{R}\left[\left(\frac{H_{\text{с}}}{R}\right)^2 + 3\frac{H_{\text{с}}}{R} \cdot \frac{\delta_{\text{с}}}{R} + 3\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\right];\\
\frac{D_{\text{ш}}^*}{R^2} = \frac{1}{12\left(1-\mu^2\right)} \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{b_{\text{ш}}}{a_{\text{ш}}} \cdot \frac{H_{\text{ш}}}{R}\left[\left(\frac{H_{\text{ш}}}{R}\right)^2 + 3\frac{H_{\text{ш}}}{R} \cdot \frac{\delta_{\text{ш}}}{R} + 3\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\right];\\
\frac{\delta_{\text{с}}}{R} = \frac{\delta}{R} + \frac{b_{\text{с}}}{a_{\text{с}}} \cdot \frac{H_{\text{с}}}{R};\\
\frac{\delta_{\text{ш}}}{R} = \frac{\delta}{R} + \frac{b_{\text{ш}}}{a_{\text{ш}}} \cdot \frac{H_{\text{ш}}}{R},
\end{gathered} \tag{6}$$

де $H_{\text{ш}}, H_{\text{с}}, b_{\text{ш}}, b_{\text{с}}, a_{\text{ш}}, a_{\text{с}}$ – висоти, товщини та відстані між ребрами в поперечному і повздовжньому напрямах відповідно;

δ, R та L – товщина, радіус і довжина оболонки відповідно;

μ – коефіцієнт Пуассона.

Величини геометричних параметрів і механічних характеристик, які входять до формул (4) і (5), завжди мають відхилення від проєктних і виконують роль збурюючих факторів x_i.

Вважатимемо відомими чисельні значення відносних параметрів

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{R},\ \ \bar{H}_{\text{с}} = \frac{H_{\text{с}}}{R},\ \ \bar{H}_{\text{ш}} = \frac{H_{\text{ш}}}{R},\ \ \bar{b}_{\text{с}} = \frac{b_{\text{с}}}{a_{\text{с}}},\ \ \bar{b}_{\text{ш}} = \frac{b_{\text{ш}}}{a_{\text{ш}}}.$$

Математичне сподівання m_z відповідно до формули (2) має такий вигляд:

$$m_{\sigma}^{a} = 2m_E\left[\frac{1}{12\left(1-\mu^2\right)} m_{\bar{\delta}}^3 + \frac{1}{4} m_{\bar{b}_{\text{ш}}} \cdot m_{\bar{\delta}_{\text{ш}}} \cdot \left(m_{\bar{\delta}_{\text{ш}}}^2 + 3m_{\bar{\delta}}^2\right)\right]^{0,5} \cdot \left(m_{\bar{\delta}} + m_{\bar{b}_{\text{с}}} \cdot m_{\bar{H}_{\text{с}}}\right)^{-0,5}; \tag{7}$$

$$m_{\sigma}^{0} = 2m_E\left[\frac{1}{12\left(1-\mu^2\right)} m_{\bar{\delta}}^3 + \frac{1}{4} m_{\bar{b}_{\text{с}}} \cdot m_{\bar{H}_{\text{с}}} \cdot \left(m_{\bar{H}_{\text{с}}}^2 + 3m_{\bar{H}_{\text{с}}}^2 \cdot m_{\bar{\delta}} + 3m_{\bar{\delta}}^2\right)\right]^{0,5} \times$$

$$\times \left(m_{\bar{\delta}} + m_{\bar{b}_{\text{ш}}} \cdot m_{\bar{H}_{\text{ш}}}\right)^{0,5} \cdot \left(m_{\bar{\delta}} + m_{\bar{b}_{\text{с}}} \cdot m_{\bar{H}_{\text{с}}}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Для знаходження середнього квадратичного відхилення S_{σ^a} та S_{σ^o} необхідно визначити похідні $\frac{\partial \sigma^a}{\partial x_i}$ та $\frac{\partial \sigma^o}{\partial x_i}$, які в подальшому будемо позначати через $\sigma_{x_i}^a$ та $\sigma_{x_i}^o$.

Розглянемо асиметричну форму втрати стійкості.

Подамо функцію (4) у вигляді

$$\sigma^a_{\text{кр}} = 2E \cdot \phi_1 \cdot \phi_2, \tag{9}$$

де $\phi_1 = \left(\dfrac{D^*_{\text{ш}}}{R^3}\right)^{0,5}$; $\phi_2 = \left(\dfrac{\delta_{\text{с}}}{R}\right)^{-0,5}$.

Тоді необхідні похідні можна визначити таким чином:

$$\begin{aligned} &\sigma^a_{\bar\delta} = 2E\left(\phi_{1,\bar\delta} \cdot \phi_2 + \phi_{2,\bar\delta} \cdot \phi_1\right); && \sigma^a_{\bar H_{\text{с}}} = 2E \cdot \phi_{1,\bar\delta} \cdot \phi_{2,\bar H_{\text{с}}};\\ &\sigma^a_E = 2\phi_1 \cdot \phi_2; && \sigma^a_{\bar b_{\text{ш}}} = 2E \cdot \phi_{1,\bar b_{\text{ш}}} \cdot \phi_2;\\ &\sigma^a_{\bar b_{\text{с}}} = 2E\phi_1 \cdot \phi_{2,\bar b_{\text{с}}}; && \sigma^a_{\bar H_{\text{ш}}} = 2E \cdot \phi_{1,\bar H_{\text{ш}}} \cdot \phi_2, \end{aligned} \tag{10}$$

де $\phi_{1,\bar\delta} = \dfrac{\dfrac{\bar\delta}{\left(1-\mu^2\right)} + 3\bar b_{\text{ш}} \cdot \bar H_{\text{ш}}\left(\bar H_{\text{ш}} + 2\bar\delta\right)}{8\phi_1}$;

$$\phi_{2,\bar\delta} = -0,5\left(\bar\delta + \bar b_{\text{с}} \cdot \bar H_{\text{с}}\right)^{-1,5}; \qquad \phi_{2,\bar b_{\text{с}}} = \bar H_{\text{с}} \cdot \phi_{2,\bar\delta};$$

$$\phi_{1,\bar b_{\text{ш}}} = \frac{\bar H_{\text{ш}} \cdot \left(\bar H^2_{\text{ш}} + 3\bar H_{\text{ш}} \cdot \bar\delta^2 + 3\bar\delta^2\right)}{8\phi_1}; \qquad \phi_{2,\bar H_{\text{с}}} = \bar b_{\text{с}} \cdot \phi_{2,\bar\delta}.$$

Отже, визначені всі величини, необхідні для знаходження середнього квадратичного відхилення S_z за виразом (3) при асиметричній формі втрати стійкості.

Аналогічно можна навести вирази і для осесиметричної форми втрати стійкості. Але, враховуючи те, що теоретичні результати, наведені в статті, будуть порівнюватися з експериментальними даними праці [5], де виявлені лише асиметричні форми втрати стійкості, обмежимося дослідженням тільки цього виду деформації.

Для уточнення параметрів m_z та S_z у розкладі Тейлора обмежимося членами порядку не вище другого.

Залежності для визначення математичного сподівання m_σ і середнього квадратичного відхилення S_σ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \varphi\left(m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)_m \cdot S^2_{x_i};\\ S_\sigma &= \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i^2}\right)^2_m \cdot S^2_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)^2_m \cdot S^4_{x_i}}. \end{aligned} \tag{11}$$

У залежностях (11) враховано, що параметри некорельовані і розподілені за близькиим до нормального законом.

Проілюструємо використання наведених залежностей і в цілому метода малих параметрів для конструктивно ортотропних оболонок, результати експериментальних досліджень яких наведені у праці [5].

Експериментальні оболонки складаються з корпуса і 16 підкріплюючих повздовжніх елементів (стрингерів).

Розглянемо два види експериментальних оболонок:

R=2·10^2 мм; L =510 мм та R=1,6·10^2 мм; L =420 мм.

Матеріал оболонок АМг2М, для якого $\sigma_B = 190$ МПа, $\sigma_T = 80$ МПа, E=0,71 10^5 МПа.

Наведемо чисельні характеристики заміряних величин оболонок.

Для 1-го виду:

$m_{\bar{\delta}} = 0,31 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{\delta}} = 1 \cdot 10^{-4}$; $m_{\bar{b}_c} = 1,17 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{b}_c} = 2,55 \cdot 10^{-4}$; $m_{\bar{H}_c} = 4,15 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{H}_c} = 2 \cdot 10^{-4}$

Для 2-го виду:

$m_{\bar{\delta}} = 0,394 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{\delta}} = 1,25 \cdot 10^{-4}$; $m_{\bar{b}_c} = 1,48 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{b}_c} = 3,18 \cdot 10^{-4}$; $m_{\bar{H}_c} = 5,2 \cdot 10^{-2}$; $S_{\bar{H}_c} = 2,5 \cdot 10^{-4}$.

Оскільки для цих оболонок найменшими є напруження за асиметричною формою втрати стійкості, то згідно з вище наведеними формулами математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюватимуть:

– для 1-го виду $m_{\sigma^a} = 111,2$ МПа і $S_{\sigma^a} = 5,7$ МПа;

– для 2-го виду $m_{\sigma^a} = 91,7$ МПа і $S_{\sigma^a} = 4,6$ МПа.

Закон розподілення випадкової величини $\sigma^a_{кр}$ нам невідомий, а її розкид залежить від багатьох незалежних випадкових параметрів x_i, тому вважатимемо, що розподілення відбувається за нормальним законом. Отже, вибираємо інтервал практично шуканих значень $\sigma^a_{кр}$ за «правилом 3S». Розкид теоретичних значень для даних оболонок лежить у межах від 94 МПа до 123 МПа і від 110 МПа до 135 МПа.

Отримані значення $\sigma^a_{кр}$ перевищують границю текучості матеріалу, тому їх слід перерахувати за напівемпіричною формулою [4]

$$\sigma_T = \sigma_B \frac{1+\vartheta}{1+\vartheta+\vartheta^2}, \tag{12}$$

де $\vartheta = \sigma_B / \sigma^a_{кр}$, а σ_B – границя міцності.

З урахуванням виразу (12) критичні напруження для досліджуваних оболонок будуть у межах від 72 МПа до 87 МПа і від 85 МПа до 94 МПа. Візьмемо для оболонок $\sigma_{T1} = 79,5$ МПа, $\sigma_{T2} = 89,5$ МПа.

Порівнюючи теоретичні дослідження критичних напружень з експериментальними, отримуємо математичне сподівання коефіцієнта критичності напружень $m_{\sigma_{кр}}$, який враховує негативний вплив механічних пошкоджень поверхні оболонок, нерівномірність навантаження, недоліки технології виготовлення та інше[6]:

$$m_{\sigma^a_{кр1}} = \frac{\sigma^a_{кр1}}{\sigma_{T1}} = \frac{46,5}{79,5} = 0,58 \quad \text{і} \quad m_{\sigma^a_{кр2}} = \frac{\sigma^a_{кр2}}{\sigma_{T2}} = \frac{53,4}{89,5} = 0,60,$$

де $\sigma^a_{кр1}$=46,5 МПа і $\sigma^a_{кр2}$=53,4 МПа – експеріментальні значення критичних напружень досліджуваних оболонок [5].

Таким чином, критичні напруження реальних (експериментальних) оболонок виявились значно нижчими за ідеальні (детерміністські).

Висновки

1. Запропонований аналітичний підхід до розрахунку несучої здатності підкріплених силовим набором циліндричних оболонок дає змогу чисельно визначити критичні напруження у разі розкиду величин будь-якої кількості конструктивних параметрів.
2. З порівняння результатів теоретичних розрахунків з експериментальними даними випливає, що на несучу здатність конструктивно ортотропних оболонок також негативно впливає, подібно ізотропним оболонкам, розкид параметрів їх конструкції.
3. Перевага даного метода полягає в тому, що він достатньо зручний у прикладному відношенні, і розв'язання можна виконувати за допомогою нескладних комп'ютерних програм.

Перелік джерел посилання

1. Болотин В. В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. Москва : Гос. изд-во лит. по стр-ву и архитектуре. 1972. 308 с.

2. Кан С. Н., Ингульцов В. Л., Кириченко А. Н. Устойчивость цилиндрических оболочек с подкрепляющим слоем. *Прикладная механика*. Киев, 1972. Т. 5. № 8. С. 50–56.

3. Кириченко О. М., Раківненко В. П., Калінін П. М., Гребеник Л. А. Графоаналітичний метод дослідження міцності оболонкових конструкцій мінімальної маси. *Збірник наукових праць Національної академії Національної гвардії України*. Харків, 2020. Вип. 1(35). С. 48–56.

4. Кан С. Н., Строительная механіка оболочек. Москва : Машиностроение. 1966. 508 с.

5. Алтухер Г. М., Липовский Д. Е. Устойчивость оребрённых цилиндрических оболочек по данным экспериментальных исследований. *Расчет тонкостенных конструкций.* Харьков, 1974. Вып. 4. С. 168–177.

6. Шабалін О. Ю., Глущенко В. В. Дослідження впливу механічних пошкоджень поверхні оболонкових конструкцій на їх несучу здатність. *Збірник наукових праць Національної академії Національної гвардії України*. Харків, 2018. Вип. 1(31). С. 46–51.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2021 р.

УДК 539.3

А. Н. Кириченко, В. П. Ракивненко, П. Н. Калинин

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКТИВНО ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

В статье рассматривается задача оценивания несущей способности конструктивно ортотропных оболочек минимальной массы, которая является актуальной для летательных аппаратов. Методом малых параметров определяется численный диапазон математического ожидания критической нагрузки оболочек с учётом случайных отклонений их геометрических величин от проектных значений. Полученные в работе теоретические результаты сравнены с экспериментальными данными.

Ключевые слова: конструктивно ортотропная оболочка, метод малых параметров, разброс параметров, вероятность работоспособности.

UDC 539.3

O. Kyrychenko, V. Rakivnenko, P. Kalinin

ANALYTICAL APPROACH TO THE SOLUTION OF THE CARRYING CAPACITY PROBLEMS OF CONSTRUCTIVE ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS OF MINIMUM MASS

The paper evaluates the bearing capacity of structural orthotropic shells of minimum mass. The task is especially relevant for aircraft, the design of which is based on thin-walled shells.

Determination of critical loads on the shell with a deterministic approach, assuming that the structural scheme, geometrical and mechanical characteristics of the shell are strictly defined, can lead to an incorrect assessment of the bearing capacity of the shell and, consequently, to negative consequences, in particular, the loss of asymmetric and axial forms of buckling.

The proposed analytical approach to the study of the bearing capacity of shells is based on the method of small parameters, which makes it possible to take into account the spread of values of any number of design parameters and obtain numerical values of the mathematical expectation of critical stresses. This makes it *possible to abandon the deterministic approach with normalized initial data of design parameters, but to consider their spread and determine the mathematical expectations of the eigenvalues based on the theory of probability in the range of analytical solutions. An important feature of the proposed approach is the absence of restrictions on the number of variable design parameters.*

To illustrate the proposed approach, an example of the analysis of the loss of the asymmetric form of stability of a cylindrical structurally orthotropic shell of minimum mass reinforced by ribs in the transverse and longitudinal directions is considered. The initial data of the force set of the shell are taken as uncorrelated normally distributed random variables. The mathematical expectations of the criticality factor of the stresses of the shell under consideration, calculated in the work, showed that the critical stresses in the shell are significantly lower than the stresses obtained with the deterministic approach.

Comparative analysis of the obtained numerical results with known experimental data confirms the effectiveness of the proposed method. The advantage of this method is its simplicity, clarity, the ability to build solutions based on simple computer programs.

K e y w o r d s: structural orthotropic shell, buckling forms, method of small parameters, spread of parameter values, probability of serviceability.

Кириченко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

https://orcid.org/0000-0001-9136-7593

Раківненко Валерія Павлівна – кандидат технічних наук, доцент, завідувачка кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

https://orcid.org/0000-0002-6136-6191

Калінін Павло Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

https://orcid.org/0000-0001-9724-0630