УДК 539.3




А. П. Горбунов **В. П. Раківненко** **О. М. Кириченко** **Л. А. Гребеник**

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З ТВІРНИМИ БУДЬ-ЯКОЇ КРИВИЗНИ

У статті розглядається методика оцінювання несучої здатності оболонкових конструкцій з твірною довільної кривизни при складному навантаженні. Пропонується узагальнений підхід до розв'язування даної задачі для різного типу оболонок.

Ключові слова: *типи оболонок, несуча здатність, метод дослідження, аналіз результатів.*

Постановка проблеми. В наш час тонкостінним системам належить вагоме місце в промисловості і військовій справі (корпуси ракет і космічних апаратів, фюзеляжі літаків, цистерни, паливні баки автобронетехніки та ін.) як найбільш дешевим і технологічно раціональним конструкціям. Їх несуча здатність, як правило, визначається напруженнями втрати стійкості від різного роду навантажень.

Разом з тим теоретичні дослідження несучої здатності виконані повною мірою лише в області циліндричних і, частково, сферичних оболонок. Але на практиці нерідко використовуються оболонки з криволінійними твірними (наприклад, еліпсоїди), і їх дослідження далекі від завершення.

Мета статті – запропонувати узагальнену методику оцінювання несучої здатності оболонок обертання з довільною кривизною твірної. Методика вважається узагальненою, оскільки дослідження проводяться за єдиним методом (енергетичним) і єдиним алгоритмом.

Виклад основного матеріалу. Розглядається широкий клас задач стійкості циліндричних, конічних, сферичних та інших оболонок з криволінійними твірними. Труднощів, які при цьому виникають, можливо уникнути, використовуючи теорію місцевої стійкості [1], коли в межах однієї напівхвилі деформації геометрія товщини поверхні оболонки ототожнюється з геометрією на площині. Це дає можливість вважати повздовжні переміщення u та кільцеві υ незначними, порівняно з радіальними ω, а головні радіуси кривизни R, ρ і кути нахилу θ – постійними.

Задача розв'язується з використанням основних диференціальних рівнянь загальної теорії стійкості оболонок та широко відомих гіпотез відсутності зсуву в товщині поверхні і нерозтяжності оболонки в кільцевому напрямку, внаслідок чого можливо подати вирази для деформацій стінки оболонки у такому вигляді:

$$\varepsilon_\xi=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\omega}{\rho};\quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{R_0}\cdot\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{\omega}{R};\quad \gamma=\frac{1}{R_0}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}+\frac{R}{\mathrm{tg}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\xi}\left(\frac{\upsilon}{R}\mathrm{tg}\theta\right);$$
$$\chi_\xi=-\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}\xi^2};\quad \chi_\varphi=-\frac{1}{R_0^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}\varphi^2}, \tag{1}$$

де R_0 – радіус паралельного кола;

φ – кут повороту меридіальної площини;

R і ρ – радіуси кривизни відповідно дотичної і твірної;

ξ – координати вздовж твірної (рис. 1).

На базі енергетичного метода розглянемо стійкість оболонки при дії на неї осьових стискаючих сил F. У докритичному стані в поперечних перерізах виникають стискаючі напруження

$$\sigma_{\xi_0}=\frac{F}{2\pi R_0\delta\cdot\cos\theta} \tag{2}$$

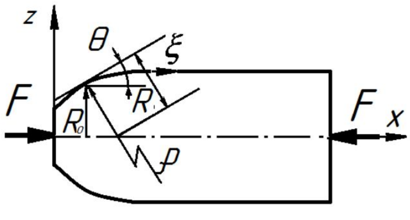

Рис. 1. Оболонка з твірною довільної кривизни

і розтягуючі напруження в меридіональних перерізах

$$\sigma_{\varphi_0} = \sigma_{\xi_0} \cdot \frac{R}{\rho}. \tag{3}$$

Критичне значення осьового стискаючого навантаження знайдемо з умови мінімуму потенціальної енергії системи.

Якщо враховувати лише найбільш вагомі складові внутрішньої енергії (кільцеві згинаючі моменти $m_\varphi = D \cdot \chi_\varphi$, де D – циліндрична жорсткість оболонки, і додаткові поздовжні напруження $\sigma_\xi = E \cdot \delta\varphi$, де E – модуль пружності матеріалу першого роду), то потенціальна енергія оболонки одиничної довжини вздовж твірної буде мати вигляд:

$$\Gamma = \oint \left[\frac{1}{2} m_\varphi \cdot \chi_\varphi + \frac{1}{2}\sigma_\xi \cdot \delta \cdot \varepsilon_\xi + \frac{1}{2}\sigma_{\varphi_0}\delta \cdot \omega \cdot \chi - \frac{1}{2}\sigma_{\xi_0}\delta \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\xi} \right)^2 R \cdot \mathrm{d}\varphi \right], \tag{4}$$

де первісні напруження σ_{φ_0} і σ_{ξ_0} виконують роботу зовнішніх сил на переміщеннях деформованої системи.

За невідоме в цій системі вважатимемо радіальні переміщення

$$\omega = \Psi(\xi) \cdot \cos n \cdot \varphi, \tag{5}$$

де $\Psi(\xi)$ – невідома функція, що змінюється вздовж твірної; n = 2, 3, 4… – числа натурального ряду.

Надалі всі деформації і внутрішні зусилля виразимо через невідому $\Psi(\xi)$ у функціоналі (4).

З умови мінімуму потенціальної енергії при переході деформованої системи у первісний стан на основі рівняння Ейлера варіаційної задачи [2] отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}^4\Psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^4} + 2\upsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2\Psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \chi^4 \cdot \Psi(\xi) = 0, \tag{6}$$

де $\upsilon^2 = -\dfrac{n^2}{\rho \cdot R \cdot \cos^2\theta} + \dfrac{F_{\text{кр}} \cdot n^4}{4\pi \cdot E\delta R^3 \cdot \cos^6\theta}$;

$$\chi^4 = \frac{D \cdot n^8}{E \cdot \delta R^6 \cdot \cos^8\theta} + \frac{n^4}{\rho^2 \cdot R^2 \cdot \cos^4\theta} + \frac{F_{\text{кр}} \cdot n^6}{2\pi \cdot E\rho R^4 \cdot \cos^8\theta}. \tag{7}$$

Розв’язком рівняння (6) буде вираз

$$\chi^4 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - 2\upsilon^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = 0, \tag{8}$$

де m = 1, 2, 3... – числа натурального ряду.

При $\dfrac{\mathrm{d}F_{\text{кр}}}{m} = 0$ отримаємо

$$\chi^4 - d^4 = 0. \tag{9}$$

З урахуванням виразу (7) будемо мати квадратне рівняння відносно $F_{\text{кр}}$:

$$\frac{D \cdot n^8}{E \cdot \delta R^6} + \frac{F_{\text{кр}} \cdot n^6}{\pi \cdot E \cdot \delta \cdot \rho \cdot R^4} - \frac{F^2_{\text{кр}} \cdot n^8}{16\pi^2 \cdot E^2\delta^2 R^6 \cdot \cos^4\theta} = 0,$$

розв’язуючи яке, для оболонки обертання з довільною кривизною твірної знаходимо критичну осьову силу

$$F_{\text{кр}} = 2\pi\cos^2\theta \cdot \sqrt{4ED\delta} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{4E\delta R^4 \cdot \cos^4\theta}{D \cdot n^4 \cdot \rho^2}} + \frac{R}{\rho}\sqrt{\frac{4E \cdot \delta R^2 \cdot \cos^4\theta}{D \cdot n^4}} \right). \tag{10}$$

Коефіцієнт при круглій дужці формули (10) є значенням критичної сили для циліндричної оболонки, а все інше – поправка на кривизну твірної.

Щодо оболонок додатної гаусової кривизни (рис. 2), то для них мінімальне значення $F_{кр}$ згідно з формулою (10) відповідає максимальній кількості хвиль у кільцевому напрямку n, за якої зникає вплив кривизни твірної. Таким чином, твердження про те, що додатна кривизна твірної нібито підвищує критичні сили порівняно з циліндричною оболонкою [1], виявилися сумнівними.

Для оболонок від'ємної гаусової кривизни (рис. 3) навіть мала її величина може суттєво знизити значення критичної сили порівняно з циліндричною оболонкою. Як приклад використання залежності (10) розглянемо стійкість при осьовому стиску ізотропної оболонки з такими параметрами: відношення довжини до радіуса $\dfrac{L}{R}=2,$ відношення радіуса до товщини $\dfrac{R}{\delta}=100,$ максимальне відхилення від прямої твірної $f=\delta$.

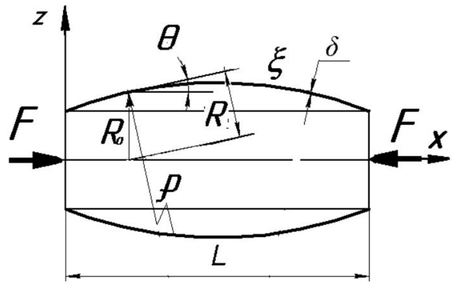

Рис. 2. Циліндрична оболонка з твірною додатної кривизни

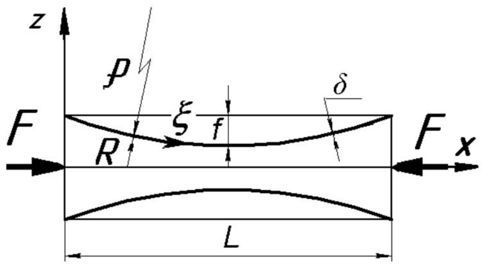

Рис. 3. Циліндрична оболонка з твірною від'ємної кривизни

У цьому випадку радіус кривизни $\rho=-\dfrac{L^2}{8f}=-\dfrac{R^2}{2\delta}$, що в підсумку дає спадання верхнього критичного напруження з $0,6E\dfrac{\delta}{R}$ для циліндричної оболонки до $0,6\cdot 0,664E\dfrac{\delta}{R}=0,4E\dfrac{\delta}{R}$. Якщо взяти оболонку, в якій $\dfrac{L}{R}=1,$ $\dfrac{R}{\delta}=100$ і $f=3\delta,$ що відповідає $\rho=-\dfrac{R^2}{24\delta},$ то для неї $0,6\cdot 0,117E\dfrac{\delta}{R}=0,07E\dfrac{\delta}{R},$ тобто отримаємо значення критичного напруження в дев'ять разів менше, ніж для циліндричної оболонки.

З аналізу формули (10) випливає також, що при $\rho=\infty$ вона перетворюється на залежність для визначення критичної сили ізотропної зрізаної конічної оболонки під дією осьових стискаючих сил (рис. 4):

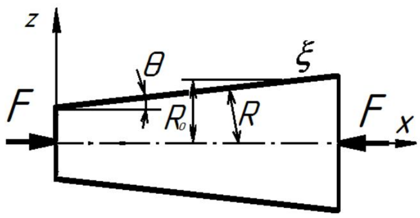

Рис. 4. Зрізана конічна оболонка

$$F_{кр}=2\pi\cos^2\theta\cdot\sqrt{4ED\cdot\delta}. \qquad (11)$$

Залежно від вимог до компонування, ремонту та експлуатації у конструкціях зразків озброєння і військової техніки, окрім циліндричних і конічних оболонок, можуть застосовуватися оболонки іншої конфігурації.

Отже, перейдемо до другого виду конструкцій, для яких навіть при значній гаусовій кривизні твірних поверхні можливо застосувати апарат теорії пологих оболонок. Маються на увазі ізотропні оболонки, утворені обертанням замкнутої кривої навколо своєї осі симетрії та навантажені рівномірно розподіленим зовнішнім надлишковим радіальним тиском p (див. рис. 5):

Результати численних експериментів показують, що втрата стійкості таких оболонок відбувається з утворенням значної кількості невеликих хвиль, і це є підставою для використання наведеної методики.

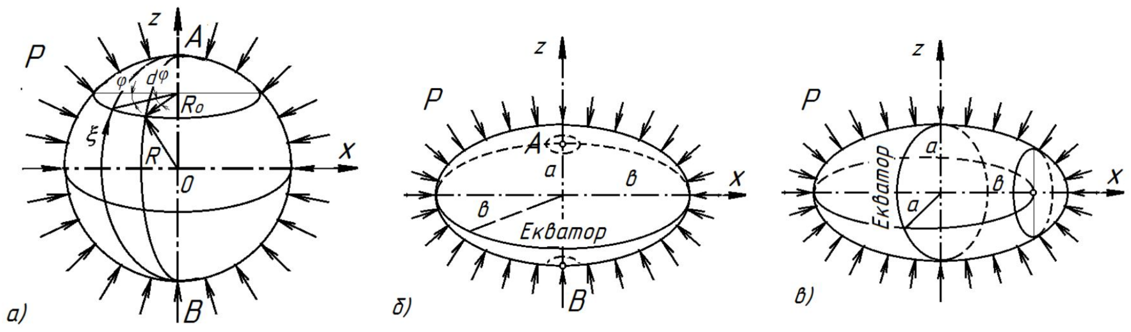

Рис. 5. Оболонки з великою гаусовою кривизною твірних

Виходячи з цього, можна вважати, що в поперечних і меридіональних перерізах елемента оболонки, обмеженого хвилями, виникають стискаючі напруження

$$\sigma_{\xi_0} = \frac{PR}{\delta}; \ \sigma_{\varphi 0} = \frac{PR}{\delta} - \sigma_{\xi_0} \cdot \frac{R}{\rho}. \tag{12}$$

Вираз для потенціальної енергії такої оболонки одиниці довжини подібний до формули (4), але у ньому як робота зовнішніх сил задіяні напруження за формулою (12).

За попередньою процедурою енергетичного методу отримаємо диференціальне рівняння варіаційної задачі, подібне до виразу (6), але з іншими коефіцієнтами:

$$\upsilon^2 = \frac{P_{\text{кр}} \cdot R^3 \cdot n^4}{4E\delta R_0^4} - \frac{R \cdot n^2}{R_0^2 \cdot \rho};$$

$$\chi^4 = \frac{D \cdot n^8 \cdot R^2}{E \cdot \delta R_0^8} + \frac{R^2 \cdot n^4}{\rho^2 R_0^4} - \frac{P_{\text{кр}} \cdot R^3 \cdot n^6}{2E\delta R_0^6 \cdot \rho} \cdot \left(2\rho - R\right).$$

Не повторюючи вже наведених пояснень, після деяких перетворень при $R = \rho$ отримаємо відому формулу визначення величини критичного радіального навантаження *сферичної* оболонки у разі дії на неї зовнішнього надлишкового тиску (рис. 5, *а*):

$$P_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}} \cdot E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 = 1,21 \cdot E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2. \tag{13}$$

Повернемося до двох інших, менш досліджених, оболонок великої гаусової кривизни: сплющеного еліпсоїда (рис. 5, *б*), отриманого обертанням еліпса навколо малої осі, і витягнутого еліпсоїда (рис. 5, *в*), утвореного обертанням еліпса навколо великої осі. Такі оболонкові конструкції застосовуються як паливні баки на об'єктах ракетно-космічної техніки та, наприклад, у військових дронах, для яких питання ваги і раціонального компонування внутрішнього об'єму є надзвичайно важливими.

Найбільш небезпечними зонами сплющеного еліпсоїда з точки зору втрати стійкості від радіального тиску будуть зони полюсів *A* і *B*. На цих ділянках головні радіуси кривизни поверхні $R = \rho = \frac{в^2}{a}$ є найбільшими, відповідно найбільшими будуть і стискаючі нормальні напруження

$$\sigma_{\varphi_0} = \sigma_{\xi_0} = \frac{Pв^2}{2a\delta}.$$

У результаті всі розрахункові залежності сферичної оболонки залишаються в силі, але із заміною в них радіуса *R* на $\frac{в^2}{a}$. Тоді вираз критичного радіального тиску для *сплющеного* еліпсоїда обертання буде такий:

$$P_{\text{кр}} = 1,21 \cdot E \frac{a^2 в^2}{\delta^4}. \tag{14}$$

Щодо витягнутого еліпсоїда обертання (див. рис. 5, *в*), то на його поверхні слід очікувати появи місцевих вм'ятин, які свідчать про втрату стійкості в зоні екватора, де $R = R_0 = a$ та $\rho = \frac{в^2}{a}$. Тоді, з урахуванням того, що $\frac{a}{в^2} \leq 1$, вираз (14) перетворюється на розрахункову формулу для критичного тиску витягнутого еліпсоїда обертання

$$P_{\text{кр}} = 1,21 \cdot E \frac{\delta^2}{2в^2 - a^2}. \tag{15}$$

Розглянемо сплющений еліпсоїд обертання (див. рис. 5, *б*), навантажений внутрішнім тиском *P*, від якого в поперечних перерізах оболонки біля екватора виникають розтягуючі напруження $\sigma_{\xi_0} = \frac{Pв}{2\delta}$.

Одночасно в меридіональних перерізах з'являються *стискаючі* напруження $\sigma_{\varphi_0} = \frac{Pв^3}{2a^2\delta} - \frac{Pв}{\delta}$, які можуть стати причиною *втрати стійкості* оболонки.

Повторюючи алгоритм отримання формул (13) – (15), знаходимо залежність для критичного надлишкового внутрішнього тиску

$$P_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{16ED \cdot \delta}{\left(в^2 - 2a^2\right)}} = \frac{2E}{\sqrt{3\left(1 - \mu^2\right)}} \cdot \frac{\delta^2}{в^2 - 2a^2} = 1,21 \frac{E \cdot \delta^2}{в^2 - 2a^2}. \tag{16}$$

Співвідношення (16) показує, що сплющений еліпсоїд обертання може втратити стійкість від надлишкового тиску лише за умови $в \geq a \cdot \sqrt{2}$.

Висновки

1. У статті розглянуто методику, яка є узагальненою для оцінювання несучої здатності широкого класу тонкостінних оболонок обертання, в тому числі з криволінійними твірними.

2. У ході дослідження виявлені деякі результати, які спростовують постулати класичної теорії: а) опуклість поверхні циліндричних і конічних оболонок насправді *не збільшує* їх несучу здатність при стискуванні; б) деякий тип оболонок за певних умов може втратити стійкість не тільки від дії зовнішнього надлишкового стискування, а і від *внутрішнього* тиску.

Список використаних джерел

1. Власов, В. З. Избранные труды [Текст] / В. З. Власов. – Москва : Наука, 1962. – Т. 1. – 528 с.
2. Михлин, С. Г. Курс математической физики [Текст] / С. Г. Михлин. – Москва : Наука, 1968. – Т. 1. – 575 с.

Стаття надійшла до редакції 05.07.2017 р.

УДК 539.3

А. П. Горбунов, В. П. Ракивненко, А. Н. Кириченко, Л. А. Гребеник

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОБРАЗУЮЩИМИ ЛЮБОЙ КРИВИЗНЫ

В статье рассматривается методика оценки несущей способности оболочечных конструкций с образующей произвольной кривизны при сложном нагружении. Предлагается обобщенный подход к решению данной задачи для разного типа оболочек.

К л ю ч е в ы е с л о в а: типы оболочек, несущая способность, метод исследования, анализ результатов.

UDC 539.3

A. P. Horbunov, V. P. Rakivnenko, O. M. Kirichenko, L. A. Grebenik

RESEARCH OF CARRYING CAPACITY SHELL STRUCTURES WITH AN ARBITRARY CURVATURE GENERATRIX

The technique for estimating the bearing capacity of shell structures with an arbitrary curvature generatrix under complex loading is considered in the article. We propose a generalized approach to solving this problem for different types of shells.

K e y w o r d s: types of shells, bearing capacity, research method, analysis of results.

Горбунов Андрій Петрович – кандидат технічних наук, доцент, заступник начальника навчально-методичного центру – начальник навчального відділу Національної академії Національної гвардії України.

Раківненко Валерія Павлівна – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Кириченко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Гребеник Лариса Анатоліївна – доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.