УДК 539.3



В. П. Раківненко **О. М. Кириченко** **Л. А. Гребеник**

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ МІЦНОСТІ ДИСКІВ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ МАТЕРІАЛІВ, ЯКІ ЗАСТОСОВУЮТЬСЯ У ЗРАЗКАХ ОЗБРОЄННЯ ТА ВІЙСЬКОВОЇ ТЕХНІКИ

Стаття є продовженням попередньої [3], *на відміну від якої, в цій розглядається динамічна міцність дисків з фізично нелінійною характеристикою матеріалу в полі вимушених коливань.*

Ключові слова: вимушені коливання диска, дотичне навантаження, метод Генки – Каудерера, рівняння Дуфінга, амплітудно-частотні характеристики.

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі динамічної міцності в будівельній механіці описуються, як правило, неоднорідними диференціальними рівняннями високого порядку. Аналітичне розв’язання їх складне і громіздке, проблема ускладнюється ще більше при розгляді вимушених коливань [2].

До таких задач належать, наприклад, дослідження динамічної міцності дисків осьових турбін і компресорів авіаційних турбореактивних двигунів, вимоги до надійної роботи яких надзвичайно високі.

Лопаткові вінці цих дисків, окрім тангенціальної складової аеродинамічної сили газового потоку, зазнають дію високих температур, що призводить до зміни властивостей конструкційних матеріалів і робить їх фізично нелінійними. Цей факт також необхідно враховувати при складанні розрахункової схеми задачі. Тому у дослідженнях аналітичних залежностей використовують деякі спрощення, наприклад, методи Генки – Каудерера [1] і Дуфінга [2].

Метою статті є розроблення методики дослідження динамічної міцності швидкообертових дисків при їх дотичному навантаженні.

Виклад основного матеріалу. Вимушені коливання диска з фізично нелінійною характеристикою матеріалу розглядаються на основі доповіді [3], у якій оприлюднені результаті дослідження дотичних вільних коливань диска з пружного ізотропного матеріалу, який має слабку фізичну нелінійність, що описується законом Генки – Каудерера.

Відповідно до відомих положень праці [2] з використанням полярних координат $\rho, \theta, 0 \le \rho \le r$ і координати часу t у доповіді [3] було виведене диференціальне рівняння руху елемента диска в кутових переміщеннях $\varphi(\rho, t)$:

$$\left[1 + i \cdot 3\rho^2 \left(\varphi^1\right)^2\right] \cdot \varphi^{11} + 3\rho^{-1}\varphi^1 + i \cdot 5\rho\left(\varphi^1\right)^3 - C_\lambda^{-2} \cdot \varphi + C_\lambda^{-2} \cdot \rho \cdot q = 0\,, \qquad (1)$$

де ρ – питома маса диска;

q – збуджуюче навантаження на питому масу;

$C_\lambda = \sqrt{G\rho^{-1}}$ – лінійна швидкість поширення дотичного збудження у диску;

$i = J \cdot G^{-1}$ – стала;

G – модуль зсуву;

J – параметр фізичної нелінійності матеріалу для закону деформування

$$\sigma_{\rho,\theta} = G\gamma + J\gamma^3. \qquad (2)$$

У доповіді [3] також були розглянуті вільні гармонічні коливання диска з амплітудною функцією

$$\varphi = \Phi(\rho) \cdot T(t), \qquad \Phi(\rho) = \psi \cdot J_0(\nu\rho); \qquad (3)$$

отримано вираз нелінійної частоти основного тону для його контуру

$$\omega_{н} = \sqrt{7648,10\frac{J}{\mu r^2}\psi^2 + 32,14\frac{G}{\mu r^2}} \tag{4}$$

або

$$\omega_{\text{Н}}^2 = \nu_{\text{Н}}^2 \cdot \psi^2 + \omega_{\text{Л}}^2,$$

де $\omega_{л} = 5,67C_{л} \cdot r^{-1}$ – лінійна частота вільних коливань диска;

$\nu = 84,45\sqrt{i} \cdot C_{л} \cdot r^{-1}$ – частотний параметр нелінійності;

ψ – амплітуда при значенні характеристичного числа $\nu = 3,83r^{-1}$ для функції Басселя першого роду J_0.

Для побудови часткового рішення рівняння (1) при вимушених коливаннях диска неоднорідність $q(\rho,t)$ як розподілене в площині диска дотичне навантаження представимо у вигляді зосередженого (точкового) моменту інтенсивністю $m(t)$ [4]. Тоді з урахуванням першого члена розкладання навантаження в ряд за власними функціями диска будемо мати деякий функціонал

$$\psi(\rho) = \mu\beta \cdot J_0 - \frac{m}{\pi\varepsilon^2} = 0, \tag{5}$$

де $\mu q = \frac{m}{\pi\varepsilon^2}$, $\frac{m}{\pi\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m}{\pi\varepsilon^2} = q = \beta \cdot J_0(\nu\rho)$.

Тут передбачається згортка за радіусом $\varepsilon : \lim\int \psi \cdot \mathrm{d}\rho, \varepsilon \to 0$. Мінімізація функціонала за Ханкелем приводить до інтегрального рівняння

$$2\pi\int_0^{\rho} \rho \cdot \psi(\rho) \cdot J_0(\nu\rho) \cdot d\rho = 0. \tag{6}$$

Після аналітичних операцій з формулою (6) отримаємо коефіцієнт розкладання β і функцію приведеного навантаження

$$\beta = \frac{5,82m}{\pi r^2 \cdot \mu}, \quad g(\rho,t) = \frac{5,82m(t)}{\pi r^2 \cdot \mu} J_0(\nu\rho). \tag{7}$$

Згідно з виразами (7) і (3) шукаємо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$\varphi = \Phi(\rho) \cdot \Gamma(t), \tag{8}$$

де $\Phi(\rho) = J_0(\nu\rho)$, $\psi = 1$.

Після аналітичних перетворювань рівняння (1) без гармонічної лінеаризації рішення за часом отримано деякий функціонал

$$F(\rho) = \zeta(\nu, C_{л}, r; \rho, J_0, J_1; \Gamma, \ddot{\Gamma}; m) + i\zeta(\nu; \rho, J_0, J_1, \Gamma) \approx 0. \tag{9}$$

Мінімізація цього функціонала за методом, який використовувався у доповіді [3], з усіма вказаними там аналітичними операціями, дозволила отримати для фазової функції $\Gamma(t)$ таке неоднорідне рівняння нелінійного (кубічного) осцилятора:

$$\ddot{\Gamma} + 32,14C_{л}^2 r^{-2} \cdot \Gamma + 10209,54 \cdot i \cdot C_{л}^2 r^{-2} \cdot \Gamma^3 = 2,5\frac{m}{\mu r^3} = M(t). \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) типу Дуфінга відомий [2], але інтерпретуємо його таким чином. Для слабкої нелінійності і малих переміщень в зоні амплітудних значень $\Gamma \to \varphi_{\max}$ у виразі частоти $\omega_{\text{Н}}$ для точного розв'язування рівняння (10) еліптичний інтеграл $K(k)\frac{\pi}{2} \to \text{const}$. Тому, використовуючи прийом прямої лінеаризації, рівняння (10) з урахуванням φ вважаємо формально лінійним:

$$\ddot{\Gamma} + \left(\omega_{\text{Л}}^2 + \frac{4}{3}\nu_{\text{Н}}^2 \cdot \Gamma^2\right) \cdot \Gamma = \ddot{\Gamma} + \omega_{\text{Н}}^2 \cdot \Gamma = 2,5\frac{m}{\mu r^3} = M(t). \tag{11}$$

Проводячи реплантацію значення власної частоти (4), отримаємо:

$$\overline{\omega}_{\text{Н}}^2 = \omega_{\text{Л}}^2 + \frac{4}{3}\nu_{\text{Н}}^2 \cdot \mathit{Г}^2. \tag{12}$$

Таким чином,

$$\ddot{\mathit{Г}} + \overline{\omega}_{\text{Н}}^2 \cdot \mathit{Г} = M(t). \tag{13}$$

Інтеграл рівняння (13) як лінійного у формі Дюамеля – Грина має таку структуру:

$$\mathit{Г}(t) = \left(\omega_{\text{Н}}\right)^{-1} \cdot \int_0^t M(t) \cdot \sin\left[\omega_{\text{Н}}(t-\tau)\right] \cdot \mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Тоді з урахуванням формул (8) і (11), оскільки $\mathit{Г}_{\max} \to \varphi,$ запишемо загальне рішення:

$$\varphi(\rho, t) = 2{,}5\left(\mu r^3 \omega_{\text{Н}}\right)^{-1} \cdot \Phi(\rho) \cdot \int_0^t M(t) \cdot \sin\left[\omega_{\text{Н}}(t-\tau)\right] \cdot \mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

що справедливе для довільного збудження $M(t)$.

При безмасовому одиничному збуджуючому навантажені M=1→const з виразу (15) отримуємо наступний вираз нелінійної динамічної функції впливу $\mathit{Г}_{\text{Н}}$, функції Грина і коефіцієнта впливу $г_{\text{н}}$, бо на контурі диска при $\rho \to r$ $\Phi_{\max} = J_0 = 3{,}5$:

$$\begin{aligned} \mathit{Г}_{\text{Н}(\rho t)} &= \frac{2{,}5}{\mu r^3 \omega_{\text{Н}}^2}\left[1 - \cos\left(\omega_{\text{Н}} t\right)\right] \cdot \Phi(\rho); \\ г_{\text{Н}(t)} &= \frac{8{,}75}{\mu r^3 \omega_{\text{Н}}^2}\left[1 - \cos\left(\omega_{\text{Н}} t\right)\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

В операційному просторі з оператором часу $\rho \leftrightarrow t$ при однорідних початкових умовах з формули (16) після перетворень отримаємо в статичній постанові $\left(\rho \to 0, \omega_{\text{Н}} \to \omega_{\text{Л}}\right)$ коефіцієнт впливу для центра диска:

$$г_{\text{Л}} = \frac{8{,}75}{\mu r^3 \omega_{\text{Л}}^2} \cong \frac{0{,}0787}{rG}. \tag{17}$$

У випадку дії у площині диска в його центрі гармонічного збуджуючого моменту $M(t) = m \cdot \sin(\Theta t)$ ($m \leftarrow$ const) відповідно до виразу (15) запишемо:

$$\varphi(\rho, t) = \frac{2{,}5}{\mu r^3 \omega_{\text{Н}}} m \cdot \Phi(\rho) \cdot \int_0^t \sin(\theta t) \cdot \sin\left[\omega_{\text{Н}}(t-\tau)\right] \cdot \mathrm{d}\tau, \tag{18}$$

де θ – частота збудження.

Після визначення інтеграла (18) отримаємо функцію переміщень площини диска в канонічній формі:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, t) = &-\frac{m}{z} \cdot \frac{\theta}{\omega_{\text{Н}}} \cdot \frac{7{,}87\, g h r^{-1}}{\omega_{\text{Н}}^2 - \theta^2} \cdot J_0(\nu\rho) \cdot \sin\left(\omega_{\text{Н}} t\right) + \\ &+ \frac{m}{z} \cdot \frac{7{,}87\, g h r^{-1}}{\omega_{\text{Н}}^2 - \theta^2} \cdot J_0(\nu\rho) \cdot \sin(\theta t) = -\varphi_{\text{віл}} + \varphi_{\text{вим}}, \end{aligned} \tag{19}$$

де $z = \pi r^2 \cdot \mu g h$.

При цьому компонента чисто вимушеного руху з амплітудним значенням для елемента контуру диска $\rho - r$ має такий вигляд:

$$\varphi_{\text{вим}}^{\max} = \frac{m}{z} \cdot \frac{7{,}87\, g h r^{-1}}{\omega_{\text{Н}}^2 - \theta^2} = \psi. \tag{20}$$

Визначивши з формули (20) вираз $\omega_{\text{Н}}$ і дорівнявши його до виразу (4), отримаємо нелінійне алгебраїчне рівняння для опису амплітудно-частотної характеристики процесу вимушених коливань контуру диска:

$$\psi^3 + \alpha\psi + \beta = 0, \tag{21}$$

де $\alpha = \frac{\omega_{Л}^2}{\vartheta_{Н}^2} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{\omega_{Л}^2}\right)$, $\beta = -7{,}87 \frac{gh}{r\vartheta_{Н}^2} \cdot \frac{m}{z}$.

При цьому функція переміщень має такий вигляд:

$$\varphi_{вим}\left(\rho, t\right) = \psi J\left(\nu\rho\right) \cdot \sin\left(\theta t\right). \tag{22}$$

У випадку дії на диск високих температур, що характерне для теплових двигунів, у вираз переміщень (22) додається складова температурного поля $\alpha \cdot T$ (α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, T – температура).

Висновки

1. У результаті проведенного дослідження отримана математична залежність у вигляді нелінійного алгебраїчного рівняння для опису амплітудно-частотних характеристик вимушених коливань дисків, які знаходяться під дією дотичних навантажень.
2. У подальшому за допомогою спеціально розробленої комп'ютерної програми передбачається можливість використовувати отримані результати для оцінювання в режимі експрес-аналізу технічного стану та безпечної експлуатації турбокомпресорних силових установок, якими оснащені багато видів озброєння і військової техніки.

Список використаних джерел

1. Каудерер, Г. Нелинейная механика [Текст] / Г. Каудерер. – М. : НИИ, 1962. – 670 с.
2. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний [Текст] / Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1967. – 315 с.
3. Раківненко, В. П. Дотичні вільні коливання диска з фізично нелінійною характеристикою матеріалу [Текст] / В. П. Раківненко // Матеріали наук.-практ. конф. ВІВВ МВС України, 1–2 лют. 2005 р. м. Харків. – Х. : ВІВВ МВС України, 2005.
4. Бойко, Б. Т. Уравнения математической физики [Текст] / Б. Т. Бойко, Л. В. Курпа, Ю. Ф. Сенчук. – Х. : Бизнес Информ. НТУ "ХГЩ", 2002. – 288 с.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2017 р.

УДК 539.3

В. П. Ракивненко, А. Н. Кириченко, Л. А. Гребеник

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ДИСКОВ С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ МАТЕРИАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ОБРАЗЦАХ ВООРУЖЕНИЯ И ВОЕННОЙ ТЕХНИКИ

Статья является продолжением предыдущей [3], в отличие от которой, в этой рассматривается динамическая прочность дисков с физически нелинейной характеристикой материала в поле вынужденных колебаний.

К л ю ч е в ы е с л о в а: вынужденные колебания диска, касательная нагрузка, метод Генки – Каудерера, уравнение Дуфинга, амплитудно-частотные характеристики.

UDC 539.3

V. P. Rakivnenko, O. M. Kirichenko, L. A. Grebenik

STUDY OF DYNAMIC STRENGTH OF DISCS FROM THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF NONLINEAR MATERIALS, TAKE-NYAEMYH IN AME SAMPLES

The work is a continuation of the previous [3], in contrast to that seen in the dynamic strength of the discs are physically non-linear characteristic of the material in the field of forced oscillations.

K e y w o r d s: disk forced oscillations, tangential stress, Genky-Kauderer's method, Dufing's equation, amplitude-frequency characteristics.

Раківненко Валерія Павлівна – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Кириченко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.

Гребеник Лариса Анатоліївна – доцент кафедри інженерної механіки Національної академії Національної гвардії України.