УДК 531.768:623.4.018

О. М. Крюков

МЕТОД ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДАТЧИКА АКСЕЛЕРОМЕТРА ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВІДКОЧУВАННЯ СТВОЛА

У статті сформульовано початкові та граничні умови для розв'язування рівнянь руху датчика акселерометра. Запропоновано координатну сітку та кінцево-різницеві рівняння для відшукання закону руху датчика чисельним методом. Наведено алгоритмічні основи розв'язування рівнянь, викладено рекомендації з обґрунтування кроку за часом та дослідження стійкості різницевої схеми.

Ключові слова: математична модель, акселерометр, датчик, відкочування ствола, прискорення, рідинний компонент, чисельний метод, різницева схема, початкові умови, граничні умови.

Постановка проблеми. Для експериментального визначення законів змінювання балістичних елементів пострілу в експериментальній балістиці широко застосовуються методи, що базуються на вимірюванні тиску порохових газів або швидкості руху снаряда каналом ствола [1, 2]. Разом з цим у дослідженнях дії порохових газів під час пострілу певного поширення набуло вимірювання елементів відкочування ствола (шляху, швидкості, прискорення). Зокрема параметри елементів відкочування використовуються при дослідженні роботи противідкочувальних пристроїв, автоматики зброї, ефективності дульних гальм тощо.

Для визначення параметрів відкочування ствола можуть застосовуватися акселерометри, побудовані за різними принципами дії. Перспективним з погляду на можливість забезпечення сукупності бажаних технічних характеристик виявляється застосування датчика акселерометра на основі рідинного компонента (газогідродинамічного датчика) [3]. При цьому найбільш доцільним є використання як інформативного параметра площі контакту рідини з торцем порожнини ротора. Застосування газогідродинамічного датчика дозволить реалізувати його переваги: високу перевантажувальну здатність, відсутність сил сухого тертя, можливість швидкого переналаштування меж вимірювання і чутливості.

Подальші перспективи застосування такого акселерометра визначатимуться сукупністю його технічних характеристик, серед яких основними є динамічні характеристики, оскільки прилад сприймає швидкозмінне (фактично – імпульсне) прискорення. При вирішенні завдань, пов'язаних із синтезом і оцінюванням технічних характеристик акселерометра, потрібно мати математичну модель його датчика. Тому розроблення методу побудови математичної моделі газогідродинамічного датчика акселерометра для вимірювання елементів відкочування ствола є актуальним науковим завданням.

Аналіз публікацій. Статичні характеристики газогідродинамічного датчика розглянуто у праці [3], але питання отримання динамічних характеристик не вирішене. Побудові моделей руху рідини, що обертається, присвячена значна кількість публікацій. Серед них класичні монографії М. О. Сльозкіна, Х. Грінспена [4, 5] та ін. і сучасні праці, наприклад, [6, 7].

Однак рух рідини в датчику акселерометра характеризується специфічними граничними умовами, оскільки рідина лише частково заповнює його порожнину. Часткові аналітичні рішення в цих та інших працях вдається отримати лише за початкових та граничних умов, які не повністю відповідають специфіці газогідродинамічного датчика. Тому у джерелах інформації відсутні детальні відомості про динамічні характеристики таких датчиків, які б давали можливість оцінити їх застосовність для визначення параметрів відкочування ствола.

Таким чином, за неможливості отримання рішення рівнянь руху рідини в датчику акселерометра аналітичним шляхом існує необхідність у побудові математичної моделі газогідродинамічного датчика на основі чисельного розв’язання цих рівнянь. При цьому, враховуючи специфічні умови вимірювання імпульсного прискорення відкочування ствола, математична модель має давати уявлення саме про динамічні властивості датчика.

Метою статті є обґрунтування методу побудови математичної моделі газогідродинамічного датчика акселерометра.

Виклад основного матеріалу. Рух рідини в датчику описується рівняннями Нав’є – Стокса і рівнянням нерозривності, які в силу осьової симетрії течії рідини можуть бути подані в циліндричній системі координат zor у такому вигляді [4, 8]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_R}{\partial t}-\omega^2 r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 U_R}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_R}{\partial r}-\frac{U_R}{r^2}\right);\\
&\frac{\partial U_Z}{\partial t}=-a-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 U_Z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_Z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_Z}{\partial r}\right);\\
&\frac{\partial U_R}{\partial r}+\frac{\partial U_Z}{\partial z}+\frac{U_R}{r}=0,
\end{aligned}\qquad(1)$$

де t – поточний час; $U_R=U_R(r,z,t)$ та $U_Z=U_Z(r,z,t)$ – відповідно радіальна і осьова швидкості; $P=P(r,z,t)$ – тиск; ν,ρ – відповідно кінематична в’язкість і густина рідини; ω – кутова швидкість обертання рідини; a – поздовжнє прискорення, що вимірюється.

Для опису зміни радіуса вільної поверхні рідини за часом застосовується рівняння

$$\frac{\partial r}{\partial t}=U_R\,.\qquad(2)$$

При цьому приймаються такі початкові умови:

при $t=0$ $\quad P=P_0+\frac{\rho\omega^2}{2}(r^2-r_0^2);$

$U_R=U_Z=0,$

де P_0 – тиск газу в порожнині; r_0 – радіус вільної поверхні рідини при $a=0$.

Як граничні приймаються такі умови:

– на вільній поверхні (умова Діріхле) $P=P_0$;

– при $r=R,\quad z=0,\quad z=H \qquad U_R=U_Z=0,$

де R,H – радіус основи та висота ротора.

Основою побудови різницевої схеми для розв’язання рівнянь руху рідини є заміна часткових похідних у диференціальних рівняннях (1), (2) на різницеві співвідношення в кінцево-різницевих рівняннях. При цьому кінцево-різницеві вирази для часткових похідних визначаються за допомогою розкладання останніх у ряди Тейлора [9].

Координатна сітка має забезпечувати якомога більш точне врахування умов прилипання рідини до стінок порожнини датчика. Швидкість $U_R^k(i,j)$ є нормальною до бічної стінки порожнини, а $U_Z^k(i,j)$ – до її торців (тут k – номер кроку за часом, i та j – номери лінії сітки в напрямку r та z відповідно). Внаслідок винесення точок прив’язування швидкостей з вузлів координатної сітки відповідні однойменні індекси i та j швидкостей, які визначаються у двох сусідніх точках, відрізняються на дві одиниці. Для максимального наближення точок прив’язування швидкостей до відповідних поверхонь значення $U_R^k(i,j)$ визначаються на вертикальних лініях сітки, а $U_Z^k(i,j)$ – на горизонтальних лініях сітки у точках, що поділяють відстань між двома сусідніми вузлами на дві рівні частини.

Для координатної сітки, що розглядається, вирази для визначення швидкостей матимуть такий вигляд:

$$\frac{U_R^{k+1}(i,j)-U_R^k(i,j)}{\Delta\ t}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{P^{k+1}(i-2,j)-P^{k+1}(i,j)}{2h}+\omega^2\left[a-(i-1)h\right]+$$
$$+\nu\left\{\frac{U_R^{k+1}(i{+}2,j){+}U_R^{k+1}(i{-}2,j){+}U_R^{k+1}(i,j{+}2){+}U_R^{k+1}(i,j{-}2){-}4U_R^{k+1}(i,j)}{4h^2}+\right. \tag{3}$$
$$\left.+\frac{1}{a-(i-1)h}\cdot\frac{U_R^{k+1}(i-2,j)-U_R^{k+1}(i,j)}{2h}-\frac{U_R^{k+1}(i,j)}{\left[a-(i-1)h\right]^2}\right\};$$

$$\frac{U_Z^{k+1}(i,j)-U_Z^k(i,j)}{\Delta\ t}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{P^k(i,j+2)-P^k(i,j)}{2h}-g\cdot 1(t)+$$
$$+\nu\left\{\frac{U_Z^k(i+2,j)+U_Z^k(i-2,j)+U_Z^k(i,j+2)+U_Z^k(i,j-2)-4U_Z^k(i,j)}{4h^2}+\right. \tag{4}$$
$$\left.+\frac{1}{a-(i-1)h}\cdot\frac{U_Z^k(i,j)-U_Z^k(i+2,j)}{2h}\right\},$$

де $2h$ – крок сітки; Δt – крок за часом.

Рівняння нерозривності в сітковому вигляді подається виразом

$$(a-ih)U_R^k(i+1,j)-\left[a-(i-2)h\right]U_R^k(i-1,j)=\left[a-(i-1)h\right]\left[U_Z^k(i,j+1)-U_Z^k(i,j-1)\right],$$

а зміна інформативного параметра може бути описана виразом

$$\frac{\Delta S^{k+1}-\Delta S^k}{\Delta t}=2\pi r_0 U_R^{k+1}(N^k,M-2),$$

де N^k – номер лінії сітки, що обмежує об’єм рідини в напрямку or, M – кількість ліній сітки в напрямку z.

У сітковому вигляді початкові умови мають такий вигляд:

$$U_R^1(i,j)=U_Z^1(i,j)=0;\quad \Delta S^1=0;$$

$$P^1(i,j)=P_0+\frac{\rho\,\omega^2}{2}\left\{\left[a-(i-1)h\right]^2-r_0^2\right\},$$

а граничні умови –

$$U_R^k(1,j)=U_Z^k(1,j)=U_R^k(i,1)=U_Z^k(i,1)=U_R^k(i,M)=U_Z^k(i,M)=0;$$

$$P^k(N,j)=P_0.$$

Чисельне розв’язання рівнянь руху рідини передбачає виконання таких кроків:

– введення вихідних даних, встановлення початкових значень лічильників $k,\ i,\ j$;

– визначення швидкостей $U_Z^{k+1}(i,j)$ та $U_R^{k+1}(i,j)$ на $(k+1)$-му кроці за часом;

– розрахунок і виведення вихідної інформації (значень інформативного параметра, обчислюваних на $(k+1)$-му кроці за часом);

– визначення тиску $P^{k+1}(i,j)$ на $(k+1)$-му кроці за часом;

– визначення тиску у суміжних точках координатної сітки на $(k+1)$-му кроці за часом методом усереднення;

– змінювання стану лічильника кроків за часом ($k=k+1$), перехід до визначення швидкостей $U_Z^{k+1}(i,j)$ та $U_R^{k+1}(i,j)$ на наступному кроці за часом.

При виборі значення кроку за часом Δt доцільно використати умову відсутності осциляцій. Для кожного із сполучень параметрів датчика раціональним слід вважати найбільше можливе значення Δt, за якого спостерігатиметься відсутність осциляцій.

Відзначимо, що також необхідно дослідити стійкість різницевої схеми. Таке дослідження можна виконати, наприклад, за допомогою методу дискретних збурень [10], при цьому в кінцево-різницеві рівняння потрібно вводити збурення (адитивні і мультиплікативні члени) як за вхідними даними, так і за обчислюваними величинами у довільних точках сітки і у довільні моменти часу.

Висновки

У статті запропоновано метод побудови математичної моделі газогідродинамічного датчика акселерометра для вимірювання параметрів відкочування ствола, який полягає у формуванні різницевої схеми і чисельному розв’язанні рівнянь Нав’є – Стокса і рівняння нерозривності, поданих у циліндричній системі координат, за специфічних початкових та граничних умов.

Запропоновані метод і алгоритмічні основи розв’язання рівнянь можуть бути застосовані як у моделюванні та дослідженні характеристик датчика акселерометра, призначеного для вимірювання елементів відкочування ствола, так і у синтезі такого датчика, який має задані параметри.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на отримання розв’язків рівнянь руху рідини, дослідження стійкості і збіжності різницевої схеми, а також на апроксимацію динамічних властивостей датчика еквівалентною схемою у вигляді системи елементарних динамічних ланок.

Список використаних джерел

1. Крюков, О. М. Перспективи експериментального визначення балістичних елементів пострілу [Текст] / О. М. Крюков, В. Г. Мудрик // Збірник наукових праць Академії внутрішніх військ МВС України. – Харків : Акад. ВВ МВС України, 2013. – Вип. 1(21). – С. 21–24.
2. Крюков, О. М. Проблеми вимірювального контролю параметрів внутрішньобалістичних процесів [Текст] / О. М. Крюков, О. А. Александров // Збірник наукових праць ХУПС. – Харків : ХУПС, 2009. – Вип. 1 (19). – С. 150–152.
3. Крюков, О. М. Принцип побудови перспективного акселерометра для вимірювання параметрів відкочування ствола [Текст] / О. М. Крюков // Збірник наукових праць Національної академії Національної гвардії України. – Харків : НАНГУ, 2017. – Вип. 2 (30). – С. 5–8.
4. Слезкин, Н. А. Динамика несжимаемой жидкости [Текст] / Н. А. Слезкин. – Москва : ГИТТЛ, 1955. – 520 с.
5. Гринспен, Х. Теория вращающихся жидкостей [Текст] / Х. Гринспен. – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1975. – 304 с.
6. Панкратов, В. М. О неустановившемся течении вращающейся жидкости при наличии свободной поверхности [Текст] / В. М. Панкратов, Ю. В. Чеботаревский // Аэродинамика. – Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1982. – Вып. 1. – С. 133–138.
7. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций [Текст] / под ред. О. А. Ладыженской // Записки научного семинара ЛОМИ. – Москва : Наука, 1990. – Т. 21. – 176 с.
8. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика [Текст] / Б. Т. Емцев. – Москва : Машиностроение, 1987. – 463 с.
9. Самарский, А. А. Численные методы [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.
10. Самарский, А. А. Введение в численные методы [Текст] / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1987. – 286 с.

Стаття надійшла до редакції 06.11.2017 р.

УДК 531.768:623.4.018

А. М. Крюков

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАТЧИКА АКСЕЛЕРОМЕТРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОТКАТА СТВОЛА

В статье сформулированы начальные и граничные условия для решения уравнений движения датчика акселерометра. Предложена координатная сетка и конечно-разностные уравнения для отыскания закона движения датчика численным методом. Приведены алгоритмические основы решения уравнений, изложены рекомендации по обоснованию шага по времени и исследованию устойчивости разностной схемы.

К л ю ч е в ы е с л о в а: математическая модель, акселерометр, датчик, откат ствола, ускорение, жидкостный компонент, численный метод, разностная схема, начальные условия, граничные условия.

UDC 531.768:623.4.018

O. M. Kriukov

THE METHOD OF CONSTRUCTING A MATHEMATICAL MODEL OF THE ACCELEROMETER SENSOR FOR MEASURING THE BARREL RETRACTION PARAMETERS

In order to investigate the effect of gunpowder during a shot, the measurement of the barrel retraction parameters is widespread, in particular, the measurement of barrel acceleration. Accelerometers, built on different principles of action, can be used to determine the acceleration of the barrel. The application of a gas-hydrodynamic sensor will provide the benefits of its high reloading capability, the absence of dry friction forces, the ability to reconfigure the measurement limit and sensitivity.

Differential equations of motion of a liquid in a cavity of a gas-hydrodynamic sensor are given in a cylindrical system of coordinates. The initial and boundary conditions for solving equations of motion are formulated. As the analytical solution of the equations of motion are not obtained at this time, it is proposed to solve the equations of motion by a numerical method to build a mathematical model of the sensor. The difference scheme for numerical solving of equations of motion of a liquid is based on the replacement of partial derivatives in differential equations on expressions in finite differences.

The finite-difference expressions for partial derivatives are determined by the decomposition of the latter into the Taylor series. The coordinate grid is proposed for finding the sensor motion law by a numerical method. The algorithmic foundations for equations solving are given. To select the value of the step in time it is suggested to use the condition of the absence of oscillations. It is expedient to investigate the stability of the difference scheme using the method of discrete perturbations. The perturbations are introduced as input data and as calculated values at arbitrary points of the grid and at arbitrary moments of time.

K e y w o r d s: mathematical model, accelerometer, sensor, trunk retraction, acceleration, liquid component, numerical method, difference scheme, initial conditions, border conditions.

Крюков Олександр Михайлович – доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник науково-дослідного центру службово-бойової діяльності НГУ Національної академії Національної гвардії України.