УДК 517.958

В. Д. Душкін

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА НЕПЕРІОДИЧНІЙ БАГАТОШАРОВІЙ СТРУКТУРІ

Запропоновано метод чисельного розв'язання двовимірної задачі дифракції E та H поляризованих хвиль на багатошаровій структурі. Початкові крайові задачі зводяться до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які можуть бути розв'язані чисельно за допомогою методу дискретних особливостей.

Постановка проблеми та її актуальність. Значна кількість різноманітних пристроїв, які використовуються у сучасній техніці, є багатошаровою структурою, що складається з тонких стрічок металу, розташованих у різних площинах. Змінюючи геометричні параметри структур, досягають необхідних властивостей розсіяного електромагнітного поля. Проведення чисельного експерименту при різних геометричних та фізичних параметрах структур за допомогою математичних моделей дозволить виділити структури, які дають поля з необхідними фізичними характеристиками. Таким чином, побудова математичних моделей розсіювання електромагнітних хвиль на цих структурах є актуальною задачею для сучасного дослідження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Сучасним ефективним методом побудови математичних моделей процесів дифракції електромагнітних хвиль на багатоелементних структурах є метод інтегральних перетворень, який був запропонований Ю. В. Ганделем [1]. Основною перевагою цього методу є можливість переходу без проведення додаткової аналітичної роботи до проведення експерименту більшої кількості елементів структур. Саме це дозволяє підбирати у результаті чисельного експерименту необхідні параметри дифракційної структури [2, 3].

Метою статті є побудова математичної моделі процесів дифракції E та H поляризованих хвиль на багатошарових структурах. При побудові цієї моделі початкова крайова задача зводиться до систем сингулярних рівнянь першого роду. Ця система розв'язується за допомогою методу дискретних особливостей.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо неперіодичну структуру, яка є спрощеним аналогом багатошарової структури (рис. 1).

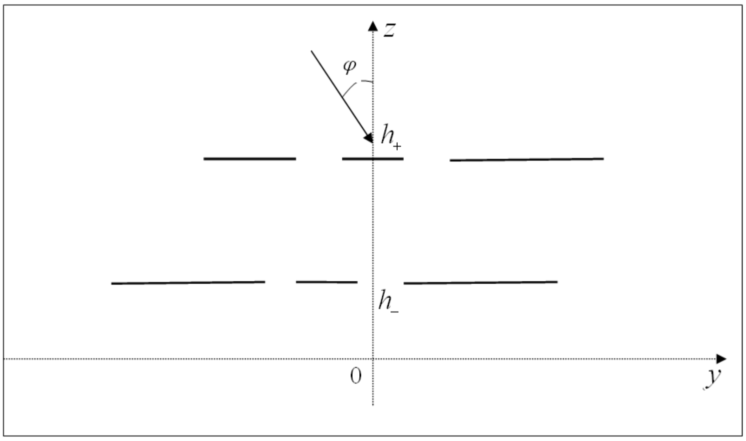

Рис 1. Дифракційна структура

У площинах $z = h_{\pm}$, розташовані нескінченно тонкі екрани, які мають ідеальну провідність. На верхній площині знаходиться M^{+} екранів, на нижній площині знаходиться M^{-} екранів.

Нехай

$$L^{\pm} = \left\{ y \middle| \, y \in \bigcup_{q^{\pm}=1}^{M^{\pm}} (a^{\pm}_{q^{\pm}}, b^{\pm}_{q^{\pm}}) \right\}. \tag{1}$$

y-кові координати точок площин $z = h_{\pm}$ у яких знаходяться екрани.

Введемо також позначення:

$$\Omega^{(+)} = \left\{ (y,z) \ \middle| z > h_{+} \right\}, \tag{2}$$

$$\Omega^{(-)} = \left\{ (y,z) \ \middle| z < h_{-} \right\}, \tag{3}$$

$$\Omega^{(*)} = \left\{ (y,z) \ \middle| h_{-} < z < h_{+} \right\}. \tag{4}$$

Нехай з нескінченності згори на цю структуру нахилено падає E-поляризована хвиля одиничної амплітуди.

$$E_x = exp\left(ik\left(y\cdot sin\varphi - z\cdot cos\varphi\right)\right). \tag{5}$$

У задачі необхідно знайти поле, яке виникло у результаті дифракції хвилі на структурі.

Поле, яке виникло у результаті дифракції хвилі на структурі $u(y,z)$, будемо шукати у вигляді:

$$u(y,z) = \begin{cases} E_x + u^{+}(y,z), & (y,z)\in \Omega^{(+)}, \\ E_x + u^{*}(y,z), & (y,z)\in \Omega^{(*)}, \\ E_x + u^{-}(y,z), & (y,z)\in \Omega^{(-)}. \end{cases} \tag{6}$$

Поле в області $\Omega^{(+)}$ будемо шукати у вигляді:

$$u^{+}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y-\gamma(\lambda)(z-h_{+})}d\lambda, \tag{7}$$

де

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2},$$
$$Re\left(\gamma(\lambda)\right) \ge 0, \quad Im\left(\gamma(\lambda)\right) \le 0. \tag{8}$$

Вибір знаків дійсної та уявної частин величини $\gamma(\lambda)$ визначається умовами випромінювання.

Поле в області $\Omega^{(-)}$ будемо шукати у вигляді:

$$u^{-}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y+\gamma(\lambda)(z-h_{-})}d\lambda. \tag{9}$$

Поле в області Ω^{*} будемо шукати у вигляді:

$$u^{*}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(D^{+}(\lambda)\cdot\frac{sh\left(\gamma(\lambda)(z-h_{-})\right)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})\right)} + \right.$$
$$\left. +D^{-}(\lambda)\cdot\frac{sh\left(\gamma(\lambda)(z-h_{+})\right)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})\right)}\right)\cdot e^{i\lambda y}. \tag{10}$$

З умов неперервності поля на площинах $z = h_{\pm}$ та крайових умов отримуємо:

$$u^{\pm}(y,h_{\pm}) = -E_x(y,h_{\pm}), \quad y\in L^{\pm}; \tag{11}$$

$$u^{*}(y,h_{\pm}) = -E_x(y,h_{\pm}), \quad y\in L^{\pm}; \tag{12}$$

$$u^{\pm}(y,h_{\pm}) = u^{\cdot *}(y,h_{\pm}), \quad y\in CL^{\pm}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial z}(y,h_{\pm}) = \frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,h_{\pm}), \quad y\in CL^{\pm}. \tag{14}$$

З умов (11 – 14), з урахуванням (8 – 10) маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda = -e^{ik\left(y\cdot sin\,\varphi - h_{\pm}\cdot cos\,\varphi\right)}, \quad y\in L^{\pm}; \tag{15}$$

$$\pm\int_{-\infty}^{\infty} D^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda = -e^{ik\left(y\cdot sin\,\varphi - h_{\pm}\cdot cos\,\varphi\right)}, \quad y\in L^{\pm}; \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y} d\lambda = \pm \int_{-\infty}^{\infty} D^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \qquad y \in CL^{\pm}; \tag{17}$$

$$\mp \int_{-\infty}^{\infty} C^{\pm}(\lambda)\,\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\cdot\Big(D^{\pm}(\lambda)\cdot cth\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big) + \tag{18}$$

$$+ \frac{D^{\mp}(\lambda)}{sh\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)}\Big)\cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in CL^{\pm}.$$

Із рівностей (15, 16) випливає, що майже всюди:

$$C^{\pm}(\lambda) = \pm D^{\pm}(\lambda), \quad \lambda \in R. \tag{19}$$

Наслідком (18, 19) є рівності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\cdot\Big[C^{\pm}(\lambda)\cdot\Big(1 + cth\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)\Big) -$$

$$- \frac{C^{\mp}(\lambda)}{sh\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)}\Big]\cdot e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CL^{\pm}. \tag{20}$$

Для зручності подальших перетворень уведемо позначення:

$$R^{\pm}(\lambda) = C^{\pm}(\lambda)\cdot\Big(1 + cth\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)\Big) -$$

$$- \frac{\gamma_{\varepsilon}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\cdot\frac{C^{\mp}(\lambda)}{sh\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)}. \tag{21}$$

Уведемо функції:

$$F^{\pm}(y) = \frac{\partial u^{(\pm)}}{\partial z}(y, h_{\pm}) - \frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y, h_{\pm}) =$$

$$= \mp \int_{-\infty}^{\infty} R^{\pm}(\lambda)\cdot\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R. \tag{22}$$

З формули (12) маємо:

$$F^{\pm}(y) = 0, \quad y \in CL^{\pm}. \tag{23}$$

Використовуючи визначення та властивості функцій $F^{\pm}(y)$, знаходимо:

$$R^{\pm}(\lambda) = \frac{\pm 1}{2\pi\gamma(\lambda)} \int_{L} F^{\pm}(t)\cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in R. \tag{24}$$

З умов (21, 24), маємо:

$$C^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2} R^{\pm}(\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{2\Big(1 + ch\big(\gamma(\lambda)(h_+ - h_-)\big)\Big)} R^{\mp}(\lambda) =$$

$$=\frac{\mp 1}{4\pi\gamma(\lambda)}\int\limits_L F^{\pm}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt\pm$$

$$\pm\frac{1\left(1+ch\left(\gamma(\lambda)(h_+-h_-)\right)\right)^{-1}}{4\pi\gamma(\lambda)}\int\limits_L F^{\mp}(t)\cdot e^{-i\lambda t}dt. \tag{25}$$

Використовуючи формули:

$$J_0(y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{cos(yt)dt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad Y_0(|y|)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{cos(yt)dt}{\sqrt{t^2-1}} \tag{26}$$

маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\lambda)}\cdot e^{i\lambda(y-t)}dt=\pm\frac{i}{2}H_0^1(k|y-t|), \tag{27}$$

де $H_0^1(y)=J_0(y)+i\cdot N_0(y)$ – функція Ханкеля першого роду нульового порядку.

Підставляючи вираз (24) в інтегральне подання для поля $u^{\pm}(y,h_{\pm})$ маємо:

$$u^{\pm}(y,h_{\pm})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=\mp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\gamma(\lambda)}\int\limits_L F^{\pm}(t)\cdot e^{i\lambda(y-t)}dtd\lambda\mp$$

$$\mp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_L\frac{e^{i\lambda(y-t)}F^{\pm}(t)}{4\pi\gamma(\lambda)\left(1+ch\left(\gamma(\lambda)(h_+-h_-)\right)\right)}dtd\lambda= \tag{28}$$

$$=\pm\frac{i}{2\pi}\int\limits_L\left(-\frac{i\pi}{2}\right)H_0^1(k|y-t|)F^{\pm}(t)dt\pm$$

$$\pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_L K(y,t)F^{\mp}(t)dt.$$

де

$$K(y,t)=\int\limits_0^\infty\frac{cos(\lambda(y-t))d\lambda}{\gamma(\lambda)\left(1+ch\left(\gamma(\lambda)(h_+-h_-)\right)\right)}. \tag{29}$$

З (18, 28) слідує, що функції $F^{\pm}(t)$ є розв'язком інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L\left(-\frac{i\pi}{2}\right)H_0^1(k|y-t|)F^{\pm}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_L K(y,t)F^{\mp}(t)dt= \tag{30}$$

$$=\pm 2\,exp\left(ik\left(y\cdot sin\varphi-h_{\pm}\cdot cos\varphi\right)\right),\quad y\in L^{\pm}.$$

Рівняння (30) еквівалентні до системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{i\pi k}{2} H_1^1\left(k\left(y-t\right)\right)F^{\pm}(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial y}K\left(y,t\right)F^{\mp}(t)dt=$$

$$=\pm 2ik\sin\varphi\cdot\exp\left(ik\left(y\cdot\sin\varphi-h_{\pm}\cdot\cos\varphi\right)\right),\qquad y\in L^{\pm} \tag{31}$$

з додатковими умовами:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\left(-\frac{i\pi}{2}\right)H_0^1\left(k\left|y_q^{\pm}-t\right|\right)F^{\pm}(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L K\left(y_q^{\pm},t\right)F^{\mp}(t)dt=\mp 2\cdot e^{\left(ik\left(y_q^{\pm}\cdot\sin\varphi-h_{\pm}\cdot\cos\varphi\right)\right)},\ \left(q=1,\ldots,M^{\pm}\right), \tag{32}$$

де кожна з точок $y_q^{\pm}$ є довільною, але фіксованою точкою інтервалу $\left(\alpha_q^{\pm},\beta_q^{\pm}\right)$.

Обґрунтування законності переходу від ИУ інтегральних рівнянь (30) з логарифмічною особливістю до сингулярного рівняння (31) з додатковими умовами (32) було зроблене Ю. В. Ганделем.

В силу умов Майкснера на ребрі:

$$F^{\pm}(y)=O\left(r^{-1/2}\right),\quad r\to 0, \tag{33}$$

де

$$r=\min_{q=1,\ldots,M^{\pm}}\left(\left|y-\alpha_q^{\pm}\right|,\left|y-\beta_q^{\pm}\right|\right). \tag{34}$$

Скориставшись цією властивістю, подамо звуження функції $F^{\pm}(y)$ у вигляді:

$$F^{\pm}(y)=\frac{v^{\pm}_{q^{\pm}}\left(y\right)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q^{\pm}\right)\left(\beta_q^{\pm}-y\right)}},\quad y\in\left(\alpha^{\pm}_{q^{\pm}},\beta^{\pm}_{q^{\pm}}\right). \tag{35}$$

Уведемо функції:

$$g_q^{\pm}\left(t\right)=\frac{\beta_q^{\pm}-\alpha_q^{\pm}}{2}\tau+\frac{\beta_q^{\pm}+\alpha_q^{\pm}}{2},\quad\left(q^{\pm}=1,\ldots,M^{\pm}\right). \tag{36}$$

Наслідком (27, 35 – 36) є система сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_q^{\pm}\left(\tau\right)-g_q^{\pm}\left(\xi\right)}\frac{V^{\pm}_{q^{\pm}}\left(\tau\right)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M^{\pm}}\int_{-1}^{1}R^{\pm 1}{}_{q,p}(\xi,\tau)\frac{V_p^{\pm}\left(\tau\right)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^{\mp}}\int_{-1}^{1}R^{\pm 2}{}_{q,s}(\xi,\tau)\frac{V_s^{\mp}\left(\tau\right)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}= \tag{37}$$

$$=\mp 2ik\sin\varphi\exp\left(ik\left(g_q^{\pm}\left(\xi\right)\cdot\sin\varphi-h_{\pm}\cdot\cos\varphi\right)\right),$$

розв'язки якої задовольняють додатковим умовам:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\tau-\xi_q^{\pm}\right|\frac{V_q^{\pm}\left(\tau\right)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M^{\pm}}\int_{-1}^{1}R^{\pm 3}{}_{q,s}(\xi_q^{\pm},\tau)\frac{V_p^{\pm}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^{\div}}\int_{-1}^{1}R^{\pm 4}{}_{q,s}(\xi_q^{\pm},\tau)\frac{V_s^{\mp}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}= \tag{38}$$

$$\mp 2ik\sin\varphi\cdot e^{\left(ik\left(g_q^{\pm}\left(\xi_q^{\pm}\right)\cdot\sin\varphi-h_{\pm}\cdot\cos\varphi\right)\right)};$$

де:

$$R^{\pm 1}{}_{q,p}(\xi,\tau)=\frac{ik\pi}{2}H_1^1\left(k\left(g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)},\qquad p=q;$$

$$R^{\pm 1}{}_{q,p}(\xi,\tau)=\frac{ik\pi}{2}H_1^1\left(k\left(g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)\right)\right),\quad p\neq q.$$

$$R^{\pm 2}{}_{q,s}(\xi,\tau)=\frac{\partial}{\partial y}K\left(g_q^{\pm}(\xi),g_s^{\pm}(\tau)\right).$$

$$R^{\pm 3}{}_{q,p}(\xi,\tau)=\left(-\frac{i\pi}{2}\right)H_0^1\left(k\left|g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)\right|\right)+$$

$$+\ln\left|g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)\right|,\quad p\neq q.$$

$$R^{\pm 3}{}_{q,q}(\xi,\tau)=-\frac{i\pi}{2}H_0^1\left(k\left|g_p^{\pm}(\tau)-g_q^{\pm}(\xi)\right|\right),\quad p\neq q.$$

$$R^{\pm 4}{}_{q,s}(\xi,\tau)=K\left(g_q^{\pm}(\xi),g_s^{\pm}(\tau)\right).$$

$$g_q^{\pm}\left(\xi_q^{\pm}\right)=y_q^{\pm}.$$

$$V_q^{\pm}(\tau)=v_q^{\pm}\left(g_q^{\pm}(\tau)\right),\quad q=1,\dots,M^{\pm}. \tag{39}$$

Чисельне розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь виконується за допомогою методу дискретних особливостей.

Розглянемо тепер випадок H-поляризації.

Нехай з нескінченності згори на структуру нахилено падає H-поляризована хвиля одиничної амплітуди.

$$H_x=\exp\left(ik\left(y\cdot\sin\varphi-z\cdot\cos\varphi\right)\right). \tag{40}$$

У задачі необхідно знайти поле, яке виникло у результаті дифракції хвилі на структурі.

Поле, яке виникло у результаті дифракції хвилі на структурі $u(y,z)$, будемо шукати у вигляді:

$$u(y,z)=\begin{cases}H_x+u^{+}(y,z), & (y,z)\in\Omega^{(+)},\\ H_x+u^{*}(y,z), & (y,z)\in\Omega^{(*)},\\ H_x+u^{-}(y,z), & (y,z)\in\Omega^{(-)}.\end{cases} \tag{41}$$

Поле в області $\Omega^{(+)}$ будемо шукати у вигляді:

$$u^{+}(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^{+}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y-\gamma(\lambda)(z-h_{+})}d\lambda\,, \tag{42}$$

де

$$\gamma(\lambda)=\sqrt{\lambda^{2}-k^{2}}\,,$$
$$Re\big(\gamma(\lambda)\big)\geq 0,\quad Im\big(\gamma(\lambda)\big)\leq 0. \tag{43}$$

Вибір знаків дійсної та уявної частин величини $\gamma(\lambda)$ визначається умовами випромінювання. Поле в області $\Omega^{(-)}$ будемо шукати у вигляді:

$$u^{-}(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^{-}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y+\gamma(\lambda)(z-h_{-})}d\lambda\,. \tag{44}$$

Поле в області Ω^{*} будемо шукати у вигляді:

$$u^{*}(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(D^{+}(\lambda)\cdot\frac{ch\big(\gamma(\lambda)(z-h_{-})\big)}{sh\big(\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})\big)}+\right.$$
$$\left.+D^{-}(\lambda)\cdot\frac{ch\big(\gamma(\lambda)(z-h_{+})\big)}{sh\big(\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})\big)}\right)\cdot e^{i\lambda y}. \tag{45}$$

З умов неперервності поля на площинах $z=h_{\pm}$ та крайових умов отримуємо:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial z}(y,h_{\pm})=-\frac{\partial H_{x}}{\partial z}(y,h_{\pm}),\quad y\in L^{\pm}; \tag{46}$$

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,h_{\pm})=-\frac{\partial H_{x}}{\partial z}(y,h_{\pm}),\quad y\in L^{\pm}; \tag{47}$$

$$u^{\pm}(y,h_{\pm})=u^{*}(y,h_{\pm}),\quad y\in CL^{\pm}; \tag{48}$$

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial z}(y,h_{\pm})=\frac{\partial u^{*}}{\partial z}(y,h_{\pm}),\quad y\in CL^{\pm}. \tag{49}$$

З умов (46 – 49), з урахуванням (42 – 45) маємо:

$$\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^{\pm}(\lambda)\cdot\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=ik\cdot cos\,\varphi\cdot e^{(ik(y\cdot sin\varphi-h_{\pm}\cdot cos\varphi))},\quad y\in L^{\pm}; \tag{50}$$

$$\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\cdot D^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=ik\cdot cos\,\varphi\cdot e^{(ik(y\cdot sin\varphi-h_{\pm}\cdot cos\varphi))},\quad y\in L^{\pm}; \tag{51}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\cdot C^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$
$$=\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(\lambda)\cdot D^{\pm}(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in CL^{\pm}; \tag{52}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(D^{\pm}(\lambda) \cdot cth\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right) + \right. \tag{53}$$

$$\left. + \frac{D^{\mp}(\lambda)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)} \right) \cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in CL^{\pm};$$

Із рівностей (51, 52) випливає, що майже всюди:

$$C^{\pm}(\lambda) = -D^{\pm}(\lambda), \quad \lambda \in R. \tag{54}$$

Наслідком (53, 54) є рівності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[C^{\pm}(\lambda) \cdot \left(1 + cth\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{C^{\mp}(\lambda)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)} \right] \cdot e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CL^{\pm}. \tag{55}$$

Для зручності подальших перетворень уведемо позначення:

$$R^{\pm}(\lambda) = C^{\pm}(\lambda) \cdot \left(1 + cth\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)\right) +$$

$$+ \frac{C^{\mp}(\lambda)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)}. \tag{56}$$

Уведемо функції:

$$F^{\pm}(y) = \left[\frac{\partial u^{\pm}}{\partial y}(y, h_{\pm}) - \frac{\partial u^{*}}{\partial y}(y, h_{\pm}) \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda) \cdot \left[C^{\pm}(\lambda) \cdot \left(1 + cth\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)\right) + \right. \tag{57}$$

$$\left. + \frac{C^{\mp}(\lambda)}{sh\left(\gamma(\lambda)(h_{+} - h_{-})\right)} \right] \cdot e^{i\lambda y} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R^{\pm}(\lambda) \cdot (i\lambda) \cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R.$$

Згідно з (53) функції $F^{\pm}(y)$ мають властивості:

$$\int_{\alpha_q^{\pm}}^{\beta_q^{\pm}} F^{\pm}(t)\, dt = 0, \quad q = 1, \ldots, M. \tag{58}$$

$$F^{\pm}(y) = 0, \quad y \in CL^{\pm}. \tag{59}$$

Використовуючи визначення та властивості функцій $F^{\pm}(y)$, знаходимо:

$$R^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} F^{\pm}(t) \cdot \frac{e^{-i\lambda t} - 1}{\lambda} dt, \quad \lambda \in R. \tag{60}$$

Із рівностей (56, 60) випливає, що:

$$C^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2}R^{\pm}(\lambda)-\frac{e^{-\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})}}{2}R^{\mp}(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L^{\pm}}F^{\pm}(t)\cdot\frac{e^{-i\lambda t}-1}{\lambda}dt- \qquad (61)$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L^{\mp}}F^{\mp}(t)\cdot\frac{e^{-i\lambda t}-1}{\lambda}dt.$$

Отримуємо інтегральні вирази для функцій $\frac{\partial u^{(\pm)}}{\partial z}(y,h_{\pm})$ відносно невідомих функцій $R^{\pm}(\lambda)$:

$$\frac{\partial u^{(\pm)}}{\partial z}(y,h_{\pm})=\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}C^{\pm}(\lambda)\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}R^{\pm}(\lambda)\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda\pm \qquad (62)$$

$$\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})}}{2}R^{\pm}(\lambda)\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda.$$

Неважко побачити, що:

$$\pm\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}R^{\pm}(\lambda)\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=\pm\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^{\pm}}\frac{F^{\pm}(t)dt}{t-y}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^{\pm}}Q_0(y,t)F^{\pm}(t)dt\right), \qquad (63)$$

де

$$Q_0(y,t)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\left(\gamma(\lambda)-|\lambda|\right)}{\lambda}\cdot\sin\left(\lambda(y-t)\right)d\lambda. \qquad (64)$$

Зазначимо також, що:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})}}{2}R^{\mp}(\lambda)\gamma(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^{\mp}}F^{\mp}(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})}\cdot e^{i\lambda(y-t)}}{2\lambda\cdot\gamma^{-1}(\lambda)}\cdot d\lambda dt= \qquad (65)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^{\mp}}Q_1(y,t)\,F^{\mp}(t)dt,$$

де

$$Q_1(y,t)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\gamma(\lambda)\cdot e^{-\gamma(\lambda)(h_{+}-h_{-})}}{2\lambda}\cdot\sin\left(\lambda(y-t)\right)d\lambda. \qquad (66)$$

Підставляючи у (46) інтегральні подання (63, 66), отримуємо інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^{\pm}}\frac{F^{\pm}(t)dt}{t-y}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^{\pm}}Q_0(y,t)F^{\pm}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^{\mp}} Q_1(y,t)F^{\mp}(t)\,dt = \pm ik\cos\varphi\cdot e^{iky\sin\varphi} \tag{67}$$

з додатковими умовами:

$$\int_{\alpha_q^{\pm}}^{\beta_q^{\pm}} F^{\pm}(t)\,dt = 0, \quad q = 1,\dots,M. \tag{68}$$

За умовами Майкснера на ребрі:

$$F^{\pm}(y) = O\left(r^{-1/2}\right), \quad r \to 0, \tag{69}$$

де

$$r = \min_{q=1,\dots,M}\left(\left|y-\alpha_q^{\pm}\right|,\left|y-\beta_q^{\pm}\right|\right). \tag{70}$$

Скориставшись цією властивістю, подамо звуження функції $F^{\pm}(y)$ у вигляді:

$$F^{\pm}(y) = \frac{v^{\pm}_{q^{\pm}}(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q^{\pm}\right)\left(\beta_q^{\pm}-y\right)}}, \quad y \in \left(\alpha^{\pm}_{q^{\pm}}, \beta^{\pm}_{q^{\pm}}\right). \tag{71}$$

Введемо функції:

$$g_q^{\pm}(t) = \frac{\beta_q^{\pm}-\alpha_q^{\pm}}{2}\tau + \frac{\beta_q^{\pm}+\alpha_q^{\pm}}{2}, \quad q^{\pm} = 1,\dots,M^{\pm}. \tag{72}$$

Наслідком (29, 35 – 36) є система сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)-g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi)}\frac{V^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ +\frac{1}{\pi}\sum_{p^{\pm}=1}^{M^{\pm}}\int_{-1}^{1} R^{\pm 1}{}_{q^{\pm},p^{\pm}}(\xi,\tau)\frac{V^{\pm}_{p^{\pm}}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ +\frac{1}{\pi}\sum_{p^{\mp}=1}^{M^{\mp}}\int_{-1}^{1} R^{\pm 2}{}_{q^{\pm},p^{\pm}}(\xi,\tau)\frac{V^{\mp}_{p^{\mp}}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \\ = \pm ik\cos\varphi\cdot\exp\left(ik\cdot g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi)\cdot\sin\varphi\right),\end{gathered} \tag{73}$$

розв’язки якої задовольняють додатковим умовам:

$$\int_{-1}^{1}\frac{V^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \quad q^{\pm} = 1,\dots,M^{\pm}, \tag{74}$$

де

$$\begin{gathered}R^{\pm 1}{}_{q^{\pm},q^{\pm}}(\xi,\tau) = -Q_0\left(g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi), g^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)\right), \\ R^{\pm 1}{}_{q^{\pm},p^{\pm}}(\xi,\tau) = -Q_0\left(g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi), g^{\pm}_{p^{\pm}}(\tau)\right) + \\ +\frac{1}{g^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)-g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi)}, \quad p^{\pm} \neq q^{\pm};\end{gathered}$$

$$R^{\pm 2}_{q^{\pm},p^{\pm}}(\xi,\tau) = Q_1\left(g^{\pm}_{q^{\pm}}(\xi), g^{\pm}_{p^{\pm}}(\tau)\right),$$

$$V^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau) = v^{\pm}_{q^{\pm}}\left(g^{\pm}_{q^{\pm}}(\tau)\right), \quad q = 1,\ldots,M. \tag{75}$$

Чисельне розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь виконується за допомогою методу дискретних особливостей.

Висновки

Таким чином, отримані у результаті перетворень системи сингулярних інтегральних рівнянь, мають ту ж саму форму, що і системи сингулярних інтегральних рівнянь задач дифракції на неперіодичній системі розімкнених екранів. Для цього класу систем доведена збіжність послідовності наближених розв'язків до точного розв'язку системи інтегральних рівнянь [4]. Перетворення, які проведені під час зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь, показують, що цей підхід може бути застосований для структури з більшою кількістю шарів екранів. Ця задача є напрямом подальшої роботи.

Список використаних джерел

1. Гандель Ю. В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков / Ю. В. Гендель. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1983. – Вып. 40. – С. 104 – 110.
2. Nosich A. A. Numerical analysis and synthesis of 2-D quasioptical reflectors and beam waveguides based on an integral equation approach with Nystom's discretizations/ A. A. Nosich, Y. V. Gandel / T. Magath, A. Altintas // Jornal of optic society of America A. – 2007. – Vol. 24, no 9. Pp. 2831 – 2836.
3. Gandel Y. V. Method of discrete singularities in accurate 2-B modeling of quasioptical reflector antennas/ Y. V. Gandel, A. A. Nosich // Proc/International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP-04) / Sendai? 2004. – V. 1. – Pp. 233 – 236.
4. Гандель Ю. В. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции / Ю. В. Гандель, И. К. Лифанов, Т. С. Полянская // Дифференциальные уравнения. Т. 31, 1995, № 9. – С. 1536 – 1541.

Стаття надійшла до редакції 19.11.2009 р.