УДК 539.3

В. А. Сало

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ПРИКЛАДНИХ ТЕОРІЙ

Варіаційним чисельно-аналітичним RVR-методом розв'язано задачу визначення напруженого стану відповідальних елементів конструкцій, виконаних у вигляді навантажених внутрішнім тиском нетонких циліндричних оболонок. Ефективність методу показано на прикладах. Виконано аналіз і оцінку застосовності різних прикладних теорій оболонок. Обговорюється збіжність числових результатів.

Постановка проблеми. Аналіз і оцінка міцності та жорсткості широко застосовуваних у сучасній інженерній та військовій практиці оболонкових елементів конструкцій припускають розрахунок їхнього напруженого стану на основі розв'язань відповідних крайових задач теорії пружності. Ускладнення форм пружних конструкцій техніки, зокрема військової, зумовлюють необхідність розвитку механіки пружних оболонок та побудови їх уточнених моделей. У процесі розв'язання таких задач у просторовій постановці виникають значні математичні й обчислювальні труднощі, для подолання яких використовують прикладні теорії оболонок, що засновані на різного роду припущеннях при переході від тривимірних крайових задач до двовимірних.

У розрахунковій інженерній практиці при розв'язанні різної складності крайових задач теорії пружності все більше уваги приділяють змішаним варіаційним постановкам, що будуються на основі функціонала Рейсснера I_R при незалежній апроксимації вектора переміщення u й тензора напружень σ. Чисельній реалізації таких постановок істотно заважали утруднення щодо оцінювання точності розв'язків, викликані відсутністю екстремуму в точці стаціонарності I_R. Особливий інтерес у розв'язанні цієї проблеми становлять питання збіжності отриманих розв'язків і оцінка вірогідності результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні побудована велика кількість різних варіантів прикладних теорій оболонок, тією чи іншою мірою уточнюючих класичну теорію, засновану на гіпотезах Кірхгофа – Лява. Велика кількість нерідко суперечних один одному варіантів прикладних теорій створює певні труднощі у виборі уточненої теорії, яка при цьому не містить регулярного процесу уточнення й має обмежену область свого практичного застосування. Як відомо з накопиченого у науковій літературі величезного матеріалу розрахунків на міцність і жорсткість пружних оболонок різної гаусової кривини, розроблення у рамках уточнених теорій ефективних методів розрахунку оболонок з отворами довільних розмірів і форм є актуальною проблемою, вирішення якої особливо важливе при розрахунку оболонкових елементів конструкцій із сучасних матеріалів.

Мета і постановка задачі. Один із можливих шляхів оцінювання прийнятності уточнених теорій оболонок полягає у зіставленні отриманих на їхній основі розв'язань із результатами розв'язання тривимірних задач. Результати такого зіставлення не дають остаточної відповіді на питання про придатність обраної наближеної теорії у всіх випадках, однак проведення таких зіставлень у широкому діапазоні зміни параметрів дає можливість із більшим ступенем упевненості й обґрунтованості вказати ті значення параметрів, за яких виконуються прийняті припущення.

Виклад основного матеріалу. Загальна ідея побудови прикладної теорії оболонок полягає в апроксимації шуканих компонентів переміщень u_i і напружень σ_{ij} кінцевими рядами вигляду (при $i=1,2;\ j=\overline{1,3}$)

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=0}^{l_i-1} u_{ik}\left(x_1,x_2\right) P_k\left(x_3\right); \quad u_3 = \sum_{k=0}^{l_3-1} u_{3k}\left(x_1,x_2\right) P_k\left(x_3\right); \\ \chi_{3-i}\sigma_{ij} &= \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \sigma_{ij}^{k}\left(x_1,x_2\right) P_k\left(x_3\right); \quad \chi_1\chi_2\sigma_{33} = \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \sigma_{33}^{k}\left(x_1,x_2\right) P_k\left(x_3\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Тут $\{x_1, x_2, x_3\}$ – ортогональна криволінійна система координат, де x_1 і x_2 – координати на серединній поверхні Ω_s пружної оболонки, а координата x_3 відлічується по нормалі до Ω_s; $P_k(x_3)$ – апроксимуючі

© В. А. Сало

функції, як такі застосовуються в основному ступені координати x_3, поліноми Лежандра й тригонометричні функції; $\chi_i = 1 + x_3 / R_i$; R_i – головні радіуси кривини (при $i = 1,2$) поверхні Ω_s.

Умова стаціонарності змішаного функціонала Рейсснера I_R для розрахункової пружної області Ω оболонки, а також структури розв'язань, які точно задовольняють усім геометричним і статичним крайовим умовам тривимірної задачі, можуть мати вигляд, поданий у [1]. При цьому уведені в (1) числа l_i, l_{ij} апроксимацій компонент переміщень u_i і напружень σ_{ij} по товщині оболонки визначають її зсувну модель, вибір якої відповідає завданню комбінації величин (l_i, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33}) при $i = 1, 2$.

У монографії [1] науково обґрунтована доцільність здійснення пошуку точки стаціонарності функціонала Рейсснера I_R на класі напружень і переміщень, що задовольняють крайовим умовам. У такому випадку, по-перше, послідовності Рітца для функціонала I_R сходитимуться за енергією оператора задачі до точного розв'язку; по-друге, полегшується знаходження розв'язку, оскільки необхідну точність можна одержати при меншому числі координатних функцій, що знижує накопичення погрішностей і обчислювальні витрати; по-третє, у варіаційному рівнянні зникають поверхневі інтеграли, спрощується вихідна система рівнянь, симетрична матриця якої має стрічкову структуру.

Вирішення проблеми вірогідності результатів розв'язання задач прямими методами залежить від ефективності контролю збіжності. У [1] запропонована заснована на теорії подвійності опуклого аналізу апостеріорна інтегральна оцінка точності чисельних розв'язків, одержуваних при відшуканні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейсснера I_R. Можна показати, що існує і є єдиною для лагранжіана $L(u, \sigma)$ сідлова точка $(\bar{u}, \bar{\sigma})$, компоненти якої будуть розв'язками основної варіаційної задачі для функціонала Лагранжа I_L і двоїстої – для функціонала Кастильяно I_C. Справедлива доведена рівність

$$I_L(\bar{u}) = I_R(\bar{u}, \bar{\sigma}) = I_C(\bar{\sigma}). \qquad (2)$$

Згідно з рівністю (2) задача мінімізації функціонала I_L і двоїста їй задача максимізації функціонала I_C еквівалентні задачі визначення сідлової точки функціонала I_R. Цей висновок покладений в основу апостеріорної оцінки наближених розв'язків для компонентів u і σ. У результаті порівняння величин трьох функціоналів можна побудувати алгоритм регулярного уточнення розв'язків за рахунок послідовного вибору кількості апроксимацій шуканих функцій поки рівність (1) не буде виконана з наперед заданою точністю. У [1] запропонована схема ітерацій, за якою здійснюється процедура наближення до сідлової точки I_R.

Для дослідження збіжності розробленого у монографії [1] чисельно-аналітичного RVR-методу бажано найповніше охопити всі наявні для цього можливості, оскільки оцінка точності обчислення функціоналів не гарантує тієї самої точності для шуканих переміщень і напружень, одержуваних з наближених розв'язків. Зокрема, безсумнівний інтерес становить перевірка виконання фізичних співвідношень пружності, які при розв'язанні варіаційної задачі задовольняються приблизно через те, що для функціонала Рейсснера ці співвідношення є природними диференціальними рівняннями Ейлера вигляду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - a_{ijkl}\sigma_{kl} = 0, \qquad (3)$$

де a_{ijkl} – компоненти тензора піддатливості a матеріалу оболонки.

Чисельна реалізація досліджених задач

П р и к л а д 1. Розглянемо циліндр товщиною h $(-h/2 \le x_3 \le h/2)$ і довжиною $2a$ $(-a \le x_1 \le a)$. Ізотропний нетонкий циліндр має вільні торці та зовнішню поверхню $(r = R + h/2)$, а на ділянці $-b \le x_1 \le b$ внутрішньої поверхні $(r = R - h/2)$ діє рівномірний тиск p_1. Розрахунок виконаний за таких даних: $E = 210$ ГПа; $\nu = 0{,}3$; $a = 0{,}5$ м; $h = 0{,}06$ м; $R = 0{,}6$ м; $p_1 = 1$ МПа.

Залежно від обраної зсувної моделі у табл. 1 подано результати обчислень у перетині $x_1 = 0$ переміщень u_3^-, u_3^0, u_3^+ (аналогічно напружень) відповідно при $x_3 = -h/2$, $x_3 = 0$, $x_3 = h/2$. Наведені в таблиці чисельні результати отримані на основі застосування зсувних моделей, що відповідають відомим у науковій літературі уточненим теоріям оболонок. Так, варіантам (3, 1, 3, 1, 0) і (4, 2, 4, 2, 1) відповідають теорія пологих оболонок і прикладна теорія оболонок В. В. Пікуля [2]; (2, 1, 2, 1, 0) і

(4, 3, 4, 3, 2) – теорія типу Тимошенка й прикладна теорія [3]; (2, 2, 2, 2, 1) – уточнена модель анізотропних оболонок [4], а (2, 3, 2, 3, 2) – теорія типу Рейсснера – Нагді [5].

Таблиця 1

Значення шуканих величин залежно від товщини циліндра та обраної зсувної моделі оболонки

h/R	$(l_i, l_3, l_{ii}, l_{i3}, l_{33})$	u_3^-, мкм	u_3^0, мкм	u_3^+, мкм	σ_{22}^-, МПа	σ_{22}^0, МПа	σ_{22}^+, МПа	σ_{33}^0, МПа
$\frac{1}{5}$	(2,1,2,1,0)	12,55	12,55	12,55	3,813	4,238	4,664	−0,450
	(2,2,2,2,1)	13,05	12,56	12,06	4,012	4,249	4,486	−0,442
	(2,3,2,3,2)	13,01	12,56	12,03	4,003	4,245	4,487	−0,442
	(3,1,3,1,0)	12,55	12,55	12,55	3,783	4,252	4,637	−0,450
	(4,2,4,2,1)	13,05	12,57	12,07	4,036	4,237	4,510	−0,450
	(4,3,4,3,2)	13,02	12,57	12,04	4,018	4,240	4,506	−0,450
	(7,7,7,7,7)	13,02	12,57	12,04	4,014	4,240	4,504	−0,450
1	(2,1,2,1,0)	1,046	1,046	1,046	0,287	0,289	0,290	−0,250
	(2,2,2,2,1)	1,458	0,989	0,520	0,497	0,314	0,131	−0,179
	(2,3,2,3,2)	1,654	0,891	0,705	0,495	0,312	0,129	−0,183
	(3,1,3,1,0)	1,045	1,045	1,045	0,286	0,289	0,290	−0,250
	(4,2,4,2,1)	1,483	0,986	0,489	0,574	0,286	0,145	−0,204
	(4,3,4,3,2)	1,684	0,891	0,703	0,700	0,248	0,202	−0,203
	(9,9,9,9,9)	1,744	0,894	0,655	0,776	0,252	0,200	−0,207

Розподіл у перетині $x_1 = 0$ переміщення u_3 й напруження σ_{33} по товщині ($|\zeta| = 2|x_3|/h \le 1$) показано на рис. 1 (цифри на графіках відповідають числам апроксимацій l_i при $l_{ij} = l_i$). Трикутниками позначені результати, до яких асимптотично збігаються наближені розв'язання, а кружками – результати, обчислені згідно з відомим для задачі Ламе аналітичним розв'язанням, застосування яких для циліндра, навантаженого тиском не по всій бічній поверхні, може призвести до неправильних результатів.

Усі використовувані теорії дають практично однакові результати для оболонки тонкої ($h/R < 1/5$). З аналізу результатів таблиці випливає, що для оболонки середньої товщини переважніше використовувати теорію [4] – зсувну модель (2, 2, 2, 2, 1), яка порівняно з (2, 1, 2, 1, 0) і (3, 1, 3, 1, 0) дає кращі результати в усьому діапазоні зміни товщини оболонки.

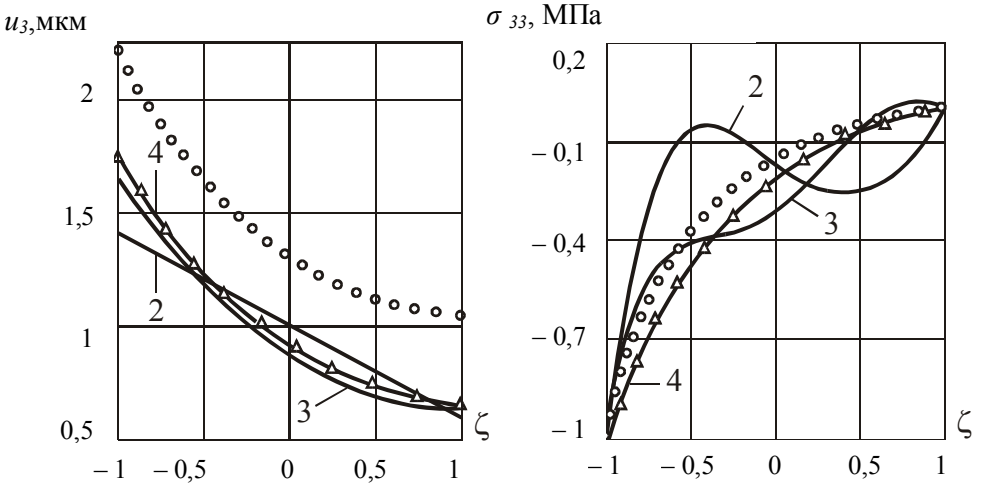

Рис. 1. Розподіл переміщення u_3 і напруження σ_{33} по товщині циліндра

Використання більш складної теорії Рейсснера – Нагді [5] – зсувна модель (2, 3, 2, 3, 2) – дає однакові з теорією [4] значення напружень і практично точні значення радіального переміщення u_3. Нарешті, найбільш точну і найскладнішу (з розглянутих варіантів) зсувну модель (4, 3, 4, 3, 2) має сенс застосовувати (у випадку збереження в теорії [3] доданків порядку $h/2R$ порівняно з одиницею) для оболонок нетонких. Відповідно до [1] теорія [3] може ефективно використовуватися при розв'язанні складних крайових задач і для товстостінних анізотропних оболонок з отворами.

П р и к л а д 2. Розглянемо вільно обпертий торцями пружний циліндр довжиною a і товщиною h, навантажений уздовж осі x_1 внутрішнім тиском:

$$q_3^- = -q_0 \sin(\gamma x_1); \quad \gamma = n\pi/a. \tag{4}$$

З'ясуємо вплив вибору моделі оболонки на точність виконання фізичних співвідношень (3), які є аналітичними виразами перед варіаціями компонентів тензора напружень σ у варіаційному рівнянні Рейсснера. У табл. 2 і 3 при $n=10$ подані по товщині (при $\zeta = 2x_3/h = -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5$) нетонкого ($h/R = 1/5$) циліндра значення деформацій ε_{ij}, обчислених за знайденими переміщеннями за допомогою співвідношень Коші – ε_{ij}^k і за знайденими напруженнями за допомогою фізичних співвідношень – ε_{ij}^f, а також відсоток відхилення $g_{ij} = 100 \cdot \left| \varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij}^f \right| \Big/ \left| \varepsilon_{ij}^k \right|$. При цьому співвідношення (3) у випадку точного розв'язку набирають вигляд $\varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij}^f = 0$.

Т а б л и ц я 2

Чисельні результати для $\varepsilon_{11}^k,\ \varepsilon_{11}^f,\ g_{11},\ \varepsilon_{22}^k,\ \varepsilon_{22}^f$ *і* g_{22}

(l_i, l_{ii})	ζ	$\varepsilon_{11}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{11}^f \cdot 10^6$	g_{11}, %	$\varepsilon_{22}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{22}^f \cdot 10^6$	g_{22}, %
(2,2)	– 0,5	0,399829	0,511001	27,8 %	0,463247	0,322793	30,3 %
	0	0,548617	0,576863	5,1 %	0,354213	0,274820	22,4 %
	0,5	1,497063	1,611097	7,6 %	0,255562	0,344834	34,9 %
(4,4)	– 0,5	0,491604	0,498277	1,4 %	0,456735	0,437503	4,2 %
	0	1,147105	1,119041	2,4 %	0,311048	0,316980	1,9 %
	0,5	1,040397	1,075563	3,4 %	0,218336	0,227028	4,0 %
(7,7)	– 0,5	0,577162	0,577129	0,005 %	0,459970	0,460089	0,03 %
	0	1,044640	1,044206	0,004 %	0,306552	0,306130	0,1 %
	0,5	1,051798	1,052067	0,03 %	0,222546	0,222655	0,04 %

Т а б л и ц я 3

Чисельні результати для $\varepsilon_{33}^k,\ \varepsilon_{33}^f,\ g_{33},\ \varepsilon_{13}^k,\ \varepsilon_{13}^f$ *і* g_{13}

(l_i, l_{ii})	ζ	$\varepsilon_{33}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{33}^f \cdot 10^6$	g_{33}, %	$\varepsilon_{13}^k \cdot 10^6$	$\varepsilon_{13}^f \cdot 10^6$	g_{13}, %
(2,2)	– 0,5	–1,717446	–1,533087	10,7 %	5,705241	5,890870	3,3 %
	0	–1,717446	–1,620833	5,6 %	4,356362	5,378008	23,5 %
	0,5	–1,717446	–1,930253	12,4 %	3,007483	2,353035	21,7 %
(4,4)	– 0,5	–2,836757	–2,869214	1,1 %	4,661366	4,861136	4,3 %
	0	–2,061863	–2,057908	0,2 %	4,953778	4,814179	2,8 %
	0,5	–1,194527	–1,174107	1,7 %	3,387747	3,522763	4,0 %
(7,7)	– 0,5	–3,127130	–3,126791	0,01 %	5,076492	5,075608	0,02 %
	0	–2,010297	–2,009545	0,04 %	4,877213	4,875651	0,03 %
	0,5	– 0,997942	– 0,997842	0,01 %	3,291432	3,291405	0,0008 %

Чисельні результати, що наведені у табл. 2 і 3, свідчать про цілком достатню збіжність одержуваних шуканих величин залежно від порядку уточнення обраної моделі оболонки, яка задається комбінацією параметрів (l_i, l_{ii}).

Висновки

Обмежуючись у розкладаннях (1) тим або іншим числом членів, ми, очевидно, одержуватимемо наближені вирази, які тим краще апроксимують дійсні переміщення й напруження, чим більше утримано членів у розкладаннях за умови збіжності рядів. Однак при використанні прикладних теорій оболонок варто мати на увазі, що відповідні цим теоріям математичні викладення зазвичай виконані при втриманні в кінцевих рядах (1) лише кількох членів, тому побудовані таким методом теорії, заміняючи розв'язання тривимірної задачі деякою двовимірною задачею, не містять регулярного процесу уточнення і мають певну область свого застосування.

У цьому плані теоретичний і практичний інтерес становить розроблений і чисельно реалізований автором монографії [1] чисельно-аналітичний RVR-метод розв'язання у тривимірній постановці крайових задач статично навантажених пружних оболонок (зокрема пластин), як однозв'язних, так і ослаблених однією чи кількома періодичними або двоякоперіодичними системами отворів довільних розмірів і форм. У зазначеному методі, заснованому на використанні варіаційного принципу Рейсснера, методі І. М. Векуа, теорії R-функцій, загальних рівнянь просторових задач теорії пружності й алгоритму регулярного уточнення зсувної моделі оболонки, як перше наближення розглядається теорія оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю типу Рейсснера.

Ефективність і можливості запропонованого RVR-методу [1] підтверджені успішним розв'язанням низки прикладних задач при проектуванні відповідальних оболонкових елементів конструкцій, що використовуються в різних галузях сучасної техніки. Так, результати використання RVR-методу впроваджені в практику УМГ "Харківтрансгаз" при визначенні й аналізі напружено-деформованого стану газопроводів і АО "СКБ Укрелектромаш" (м. Харків) при аналізі міцності послабленого отвором вала асинхронного двигуна спеціального призначення та послабленого періодичною системою отворів пружного корпусу гідромотора.

Досвід виконаних автором досліджень збіжності розв'язків численних задач свідчить, що у випадку програмної реалізації апостеріорна двостороння оцінка точності наближених розв'язків є надійним засобом перевірки вірогідності одержуваних чисельних результатів.

Список використаних джерел

1. Сало В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями / В. А. Сало. – Х. : НТУ (ХПИ), 2003. – 216 с.

2. Пикуль В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела / В. В. Пикуль. – М. : Наука, 1989. – 221 с.

3. Родионова В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек / В. А. Родионова, Б. Ф. Титаев, К. Ф. Черных. – С Пб. : Изд-во С.-Петербург. ун-т, 1996. – 278 с.

4. Григоренко Я. М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Г. П. Голуб. – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.

5. Нагди П. О теории тонких упругих оболочек / П. Нагди // Механика : сб. пер. иностр. статей. – М., 1959. – Т. 128, № 1. – С. 71–81.

Стаття надійшла до редакції 09.03.2009 р.