УДК 517.958

В. Д. Душкін

АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ Е-ПОЛЯРИЗОВАНИХ ХВИЛЬ НА ПЕРІОДИЧНІЙ ГРЕБІНЦІ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВОГО ІМПЕДАНСУ СТРУКТУРИ

Початкову крайову задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, для чисельного розв'язання яких можна застосувати метод дискретних особливостей.

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Гребінка є одним із основних конструктивних елементів багатьох технічних пристроїв та електродинамічних систем [1]. Для аналізу втрат енергії у таких системах актуальна побудова математичних моделей, які дозволяють чисельно досліджувати різноманітні електродинамічні характеристики цих систем [1, 2]. Урахування властивостей матеріалу, з яких зроблено структури, приводить до крайових задач з граничними умовами Щукіна–Леонтовича. Ефективним методом чисельного розв'язання цих задач є метод інтегральних перетворень [3, 4]. З огляду на такий підхід було запропоновано математичну модель задачі на неперіодичній гребінці [5]. У цій статті розглядається задача дифракції на періодичній гребінці (рис. 1).

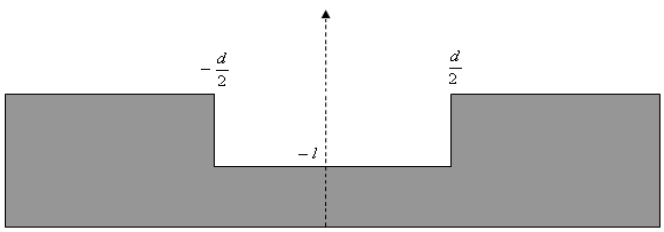

Рис. 1

Метою статті є побудова алгоритму чисельного розв'язання задачі, котрий ґрунтується на зведенні розв'язання початкової крайової задачі з граничними умовами третього роду до системи сингулярних рівнянь, яку можна розв'язати за допомогою застосування методу дискретних особливостей.

Виклад основного матеріалу. *Математична модель задачі.* Нехай на L'-періодичну по осі *OY*' і однорідну по осі *OX*' гребінку падає хвиля:

$$U_0' = \exp\left\{ik\left(y' \cdot \sin\theta - z' \cdot \cos\theta\right)\right\}. \qquad (1)$$

Уведемо позначення для компоненти повного поля $E_x' = U'$. Необхідно знайти в області Ω, яка є частиною простору зовні гребінки, розв'язок рівняння Гельмгольца:

$$\Delta U' + k^2 U' = 0\,, \qquad (2)$$

який задовольняє:

а) імпедансним граничним умовам:

$$\frac{\partial}{\partial n}U' - \hbar_E \cdot U' \;\Big|_{(y',z')\in\partial\Omega} = 0, \qquad (3)$$

де $\hbar_E = \dfrac{i\omega\mu_0\mu}{Z_s}$; $\Re e\left(\hbar_E\right) > 0$; $\operatorname{Im}\left(\hbar_E\right) > 0$; Z_s – поверхневий імпеданс матеріалу гребінки;

б) умові на ребрі, яка еквівалентна обмеженості енергії у будь-якій області *V* площини *XOY*:

$$W = \int_V \left(k^2 \cdot |U'|^2 + |\nabla U'|^2\right) dV \; ; \tag{4}$$

в) умові випромінювання Зоммерфельда;

г) умові квазіперіодичності Флоке:

$$U'(y' + L', z') = \exp\{ikL' \cdot \sin\theta\} \cdot U'(y' + L', z'). \tag{5}$$

Ураховуючи умови Флоке, поле можна шукати лише в шарі шириною L' по змінній y'. Для спрощення подальших обчислень уведемо величини:

$$\theta = \frac{d}{\pi}, \quad z = \frac{z'}{\theta} = \frac{z \cdot \pi}{d}, \quad y = \frac{d \cdot y'}{\theta} = \frac{y' \cdot \pi}{d}, \tag{6}$$

$$\kappa = \theta \cdot k, \quad h = \theta \cdot \hbar_E, \quad U(y,z) = U'(y', z'). \tag{7}$$

Функція $U(y,z)$ задовольняє таким умовам:

$$\Delta U + \kappa^2 U = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} - h \cdot U\Big|_{z_н = -\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} + h \cdot U\Big|_{z_н = \frac{\pi}{2}} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} - h \cdot U\Big|_{|y| \le \frac{\pi}{2}, z = -l} = 0. \tag{10}$$

Подання полів у вигляді рядів Фур'є. Обґрунтування законності такого подання.

Поле в області $\Omega^+ = \{(y,z) : |y| \le L \wedge z \ge 0\}$ будемо шукати у вигляді:

$$U(y,z) = U_0(y,z) + U^+(y,z), \tag{11}$$

$$U^0(y,z) = \exp\{ik(y \cdot \sin\theta - z \cdot \cos\theta)\}, \tag{12}$$

$$U^+(y,z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma_n + h} \cdot \exp[-i\gamma_n z] \cdot \exp[i(p + \kappa \sin\theta) y], \tag{13}$$

$$p_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad \gamma_n = \sqrt{(p + \kappa\sin\theta)^2 - \kappa^2} = |p| \cdot \sqrt{1 + \frac{2\kappa\sin\theta}{p} - \left(\frac{\kappa\cos\theta}{p}\right)^2}, \tag{14}$$

$$\Re e(\gamma_n) \ge 0, \quad \operatorname{Im}(\gamma_n) \le 0, \; \gamma_0 = -i\kappa\cos\theta. \tag{15}$$

Поле в області $\Omega^- = \left\{(y,z) : |y| \le \frac{\pi}{2} \wedge -l \le z \le 0\right\}$ будемо шукати у вигляді:

$$U^-(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^-} C_n Z_n(z) \cdot \omega\left(\sqrt{\lambda_n} y\right), \tag{16}$$

$$\left(\gamma_n^-\right)^2 = \lambda_n - \kappa^2, \tag{17}$$

$$Z_n(z) = \frac{\gamma_n \cdot [h \cdot sh(\gamma_n(z+l)) + \gamma_n \cdot ch(\gamma_n(z+l))]}{(\gamma^2 - h^2) sh(\gamma \cdot l)}, \tag{18}$$

$$Z_n'(0) - h \cdot Z_n(0) = \gamma_n, \qquad Z_n'(-l) - h \cdot Z_n(-l) = 0, \tag{19}$$

$$\omega\left(\sqrt{\lambda_{2n}} y\right) = \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot y\right), \qquad \omega\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} y\right) = \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot y\right), \tag{20}$$

де $\sqrt{\lambda_{2n}}$, $\sqrt{\lambda_{2n+1}}$ – корені дисперсійних рівнянь відповідно (21, 22):

$$\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - h \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{21}$$

$$\sqrt{\lambda_{2n+1}}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+h\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0\,. \tag{22}$$

Упровадимо позначення:

$$\zeta=\Re e\left(\sqrt{\lambda}\right),\ \eta=\mathrm{Im}\left(\sqrt{\lambda}\right),\ h=|h|\cdot e^{i\cdot\beta},\ \ \sqrt{\lambda}=\left|\sqrt{\lambda}\right|\cdot e^{i\cdot\alpha},\ a=\left|\frac{\sqrt{\lambda}}{h}\right|,\ \varphi=\beta-\alpha. \tag{23}$$

Ураховуючи властивості величин Z і (3), маємо

$$0<\beta\le\frac{\pi}{4}\,. \tag{24}$$

Рівняння (25) можна подати у вигляді

$$\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda_{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{\lambda_{2n}}}{h}\,. \tag{25}$$

Наслідком (21) є така рівність:

$$a\cdot\exp(-i\varphi)=a\cdot\left[\cos(\varphi)-i\cdot\sin(\varphi)\right]=\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(\pi\varsigma)}{ch(\pi\eta)-\cos(\pi\varsigma)}-i\cdot\frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta)-\cos(\pi\varsigma)}\,. \tag{26}$$

Для кожного з розв'язків рівняння (26) виконуються умови:

$$\eta=\mathrm{Im}\left(\sqrt{\lambda}\right)\ge 0\ \ ,\ 0\le\varphi\le\beta<\pi/4\,,\ \sin(\pi\zeta)\ge 0\,. \tag{27}$$

Тому для коренів рівняння (21) виконується умова $\zeta\in\left[0+2n,1+2n\right],\quad n\in N.$

Рівняння (22) можна подати у вигляді

$$\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{\lambda_{2n+1}}}{h}\,. \tag{28}$$

Наслідком (28) є така рівність:

$$-a\cdot\exp(-i\varphi)=a\cdot\left[-\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right]=$$
$$=\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(\pi\zeta)}{ch(\pi\eta)+\cos(\pi\zeta)}+i\cdot\frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta)+\cos(\pi\zeta)}. \tag{29}$$

Для кожного з розв'язків рівняння (33) виконуються умови:

$$\eta=\mathrm{Im}\left(\sqrt{\lambda}\right)\ge 0\ \ ,\ 0\le\varphi\le\beta<\pi/4\ \ ,\ \sin(\pi\zeta)\le 0\ \ . \tag{30}$$

Тому для коренів рівняння (22) виконується умова $\zeta\in\left[1+2n,2+2n\right],\quad n\in N$.

У праці [6] доведено існування та єдиність коренів системи рівнянь (21–22) у кожній з областей $\Re e\sqrt{\lambda}\in[n,1+n]$. Таким чином, у кожній області $\zeta\in[0+2n,1+2n]$ знаходиться єдиний корінь рівняння (25), а в кожній області $\zeta\in[1+2n,2+2n]$ знаходиться єдиний корінь рівняння (26).

Упровадимо позначення $\sqrt{\lambda_n}=n+\delta_n$, $\omega_n=\Re e(\delta_n)$. З рівнянь (21–22) отримуємо

$$\mathrm{ctg}\left(\delta_n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}\,. \tag{31}$$

Якщо в кожній точці області $\eta=\mathrm{Im}\left(\sqrt{\lambda}\right)=\mathrm{Im}(\delta)>M$ виконується хоча б одна нерівність:

$$\Re e\left[a\cdot\exp(-i\varphi)\right]=a\cdot\cos(\varphi)>\Re e\left[\mathrm{ctg}\left(\delta\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\left|\sin(\pi\omega)\right|}{ch(\pi\eta)-\cos(\pi\omega)}, \tag{32}$$

$$\operatorname{Im}\left[a\cdot\exp\left(-i\varphi\right)\right]=a\cdot\sin\left(\varphi\right)<\operatorname{Im}\left[\operatorname{ctg}\left(\delta\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{sh\left(\pi\eta\right)}{ch\left(\pi\eta\right)-\cos\left(\pi\omega\right)},\tag{33}$$

то в цій області не знаходяться корені рівнянь (21–22).

При виконанні однієї з двох умов:

$$a\cdot>\frac{1}{\left[ch\left(\pi M\right)-\cos\left(\pi\zeta\right)\right]\cdot\cos\left(\beta\right)},\qquad a<\frac{sh\left(\pi M\right)}{\left[ch\left(\pi M\right)-\cos\left(\pi\zeta\right)\right]\cdot\sin\left(\beta\right)}\tag{34}$$

хоча б одна з двох нерівностей (32, 33) буде виконана. Хоча б одна з двох умов (32, 33) буде виконана при всіх значеннях a, якщо $sh\left(\pi M\right)>\operatorname{tg}(\beta)$.

Таким чином, для всіх коренів дисперсійних рівнянь (21–22) виконується умова:

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n}<\frac{1}{\pi}arsh\left[\operatorname{tg}(\beta)\right]=\frac{1}{\pi}\ln\left[\frac{\sin\beta+1}{\cos\beta}\right].\tag{35}$$

Ураховуючи (30), отримуємо:

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n}\le 0,28055,\quad n\in N.\tag{36}$$

Відомо [7], що система власних і приєднаних функцій задачі Штурма–Ліувілля є повною на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Аналіз рівнянь (21–22) показує, що необхідною умовою існування приєднаних функцій є виконання рівності $h^2=-\sqrt{\lambda}^2$. Ця рівність виконується, коли $\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, але це суперечить (27, 30). Таким чином, множина приєднаних функцій є пустою і подання поля (16) в області Ω^- є законним.

Асимптотика коренів дисперсійного рівняння. Корні рівняння (31) задовольняють такій рівності:

$$\frac{1}{a}\cdot\exp\left(i\varphi\right)=\frac{1}{a}\cdot\left[\cos\left(\varphi\right)+i\cdot\sin\left(\varphi\right)\right]=\operatorname{tg}\left(\delta\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\pi\omega\right)}{ch\left(\pi\eta\right)+\cos\left(\pi\omega\right)}+i\cdot\frac{sh\left(\pi\omega\right)}{ch\left(\pi\eta\right)+\cos\left(\pi\omega\right)}\ .\tag{37}$$

За виконання умови

$$\frac{\cos\left(\varphi\right)}{a}\le\frac{1}{a}<\frac{\sin\left(\pi\omega\right)}{2}\le\frac{\sin\left(\pi\omega\right)}{ch\left(\pi\eta\right)+\cos\left(\pi\omega\right)}\tag{38}$$

у дисперсійних рівнянь (21–22) коренів немає. Таким чином, при великих значеннях *a* виконується умова

$$\zeta_n=\Re e\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\in\left[n,n+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{2}{a}\right)\right].\tag{39}$$

Корні рівняння (31) також задовольняють рівності

$$a\cdot\exp\left(-i\varphi\right)=a\cdot\left[\cos\left(\varphi\right)-i\cdot\sin\left(\varphi\right)\right]=\operatorname{ctg}\left(\delta\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\pi\omega\right)}{ch\left(\pi\eta\right)-\cos\left(\pi\omega\right)}-i\cdot\frac{sh\left(\pi\eta\right)}{ch\left(\pi\eta\right)-\cos\left(\pi\omega\right)}\ .\tag{40}$$

В області $\operatorname{Im}(z)=\eta\ge M\ \wedge\ \sin(\pi\omega)\le\frac{2}{a}$ за виконання умови

$$a\cdot\cos\left(\varphi\right)>a\cdot\cos\left(\beta\right)>a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{\frac{2}{a}}{ch\left(\pi M\right)-1}>\frac{\sin\left(\pi\omega\right)}{ch\left(\pi\eta\right)-\cos\left(\pi\omega\right)}\tag{41}$$

не знаходяться корені дисперсійних рівнянь (10–11).

Таким чином, $\forall\ \Re e\sqrt{\lambda_n} \geq ah$ усі корені рівнянь (25–26) задовольняють нерівності

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda_n}) \leq \frac{1}{\pi} arsh\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right) < \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right). \tag{42}$$

Наслідком (43, 46) є оцінка

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{a}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \to \infty. \tag{43}$$

Рівняння (35) можна подати у вигляді

$$\left(n + \delta_n\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\delta_n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = h \tag{44}$$

або

$$\delta_n = \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \delta\right] + \frac{2\delta}{\pi n} \cdot \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2h}{\pi n}. \tag{45}$$

Із (45) випливає, що

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{2h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty. \tag{46}$$

Інтегральний вираз полів на межі поділу областей Ω^- *та* Ω^+. Ґрунтуючись на ідеях робіт [3,4,7], уведемо функцію:

$$F(y) = \frac{\partial U^+(y,0)}{\partial n} - h \cdot U^+(y,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin\theta)y], \quad |y| \leq \frac{L}{2}, \tag{47}$$

яка має властивість

$$F(y) = 0, \qquad y \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \backslash \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{48}$$

Згідно з визначенням функції $F(y)$ маємо

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(t) \cdot \exp[-i(p_n + \kappa \sin\theta)t]\, dt, \tag{49}$$

$$U^+(y,0) = -\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin\theta) \cdot (y - t)] F(t)\, dt. \tag{50}$$

Ядро інтегрального оператора (50) можна подати у вигляді:

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin\theta) \cdot (y - t)] = K^+(y,t) +$$

$$+ \exp[i\kappa \sin\theta \cdot (y - t)] \cdot \left(\frac{L}{\pi}\ln\left|2 \cdot \sin\frac{\pi \cdot (y - t)}{L}\right| - 2\kappa i \sin\theta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cdot \int_0^{\frac{2\pi(y-t)}{L}} \ln\left|2 \cdot \sin\frac{s}{2}\right| ds\right), \tag{51}$$

де $K^+(y,t) \in C^{1,\alpha}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ і має такий вигляд:

$$K^{+}(y,t)=-\exp[i\kappa\sin\theta\cdot(y-t)]\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n+h}+\frac{1}{\gamma_{-n}+h}-\frac{2}{p_n}\right)\cdot\cos[p_n(y-t)]-\right.$$

$$\left.-ik\cos\theta-i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n+h}-\frac{1}{\gamma_{-n}+h}+\frac{2\kappa\sin\theta}{p_n^{\,2}}\right)\cdot\sin[p_n(y-t)]\right\}. \tag{52}$$

Похідна функції $K^{+}(y,t)$ має вигляд

$$-\frac{d}{dy}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n+h}\cdot\exp[i(p_n+\kappa\sin\theta)\cdot(y-t)]=\frac{dK^{-}(y,t)}{dy}+$$

$$+\exp\left[i\kappa\sin\theta\cdot(y-t)\right]\cdot\left(\operatorname{ctg}\left|\frac{\pi\cdot(y-t)}{L}\right|+\frac{\kappa^2\sin^2\theta}{2}\cdot\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cdot\int_0^{\frac{2\pi(y-t)}{L}}\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds\right). \tag{53}$$

Наслідком (16–20,47) є такі рівності:

$$U^{-}(y,0)=\frac{\partial U^{-}(y,0)}{\partial n}-h\cdot U^{-}(y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}C_nW_n\omega\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right),\quad W_n=Z_n(0),\quad |y|\le\frac{\pi}{2}, \tag{54}$$

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}C_n\left[Z_n{}'(0)-hZ_n(0)\right]\omega\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\omega\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right),\quad |y|\le\frac{\pi}{2}, \tag{55}$$

$$C_n=\frac{2}{d\cdot[\omega(\lambda_n)]}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\omega(\lambda_n t)\cdot F(t)\,dt, \tag{56}$$

$$[\omega(\lambda_n)]=\frac{2}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\omega^2(\lambda_n t)dt, \tag{57}$$

$$[\omega(\lambda_n)]=1+\frac{2h}{d\cdot\left(h^2+\sqrt{\lambda_n}^{\,2}\right)}. \tag{58}$$

Таким чином, ураховуючи (54, 56), для $U^{-}(y,0)$ можна отримати таке подання:

$$U^{-}(y,0)=\frac{2}{d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_n\cdot\omega(\lambda_n y)\cdot\omega(\lambda_n t)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}\right]\cdot F(t)dt=$$

$$=\frac{1}{d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t-y)\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t+y)\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}\right]\cdot F(t)dt. \tag{59}$$

Перетворимо вираз

$$\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}=\frac{\cos(nt)}{n}+\frac{2ht}{n^2\cdot\pi}\sin(nt)+Q_n(t), \tag{60}$$

$$Q_n(t)=\left[\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}-\frac{\cos(nt)}{n}-\frac{2ht}{n^2\cdot\pi}\sin(nt)\right], \tag{61}$$

$$Q_n(t)=O\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad n\to\infty. \tag{62}$$

Ядро інтегрального виразу (59), яке позначимо $K^{-}(y,t)$ з урахуванням формул:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\cdot\sin\frac{x}{2}\right|,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\cdot\cos\frac{x}{2}\right|,\tag{63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=-\int_0^x\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2}=-\int_0^x\ln\left|2\cdot\cos\frac{s}{2}\right|ds,\tag{64}$$

має вигляд

$$K^{-}(y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t-y)\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{W_n\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}(t+y)\right)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]}=$$

$$=-\ln\left|2\cdot\sin\frac{t-y}{2}\right|-\frac{2h(t-y)}{\pi}\int_0^{t-y}\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t-y)-$$

$$-\ln\left|2\cdot\cos\frac{t+y}{2}\right|-\frac{2h(t+y)}{\pi}\int_0^{t+y}\ln\left|2\cdot\cos\frac{s}{2}\right|ds+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nQ_n(t+y).\tag{65}$$

Похідна функції $K^{-}(y,t)$ по змінній y має вигляд

$$\frac{d\,K^{-}(y,t)}{dy}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-y}{2}-\frac{2h}{\pi}\left\{-\int_0^{t-y}\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds-(t-y)\cdot\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{t+y}{2}-\frac{2h}{\pi}\left\{\int_0^{t+y}\ln\left|2\cdot\cos\frac{s}{2}\right|ds+(t+y)\cdot\ln\left|2\cdot\cos\frac{y+t}{2}\right|\right\}+$$

$$+\frac{d}{dy}\left(\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t-y)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nQ_n(t+y)\right).\tag{66}$$

Із граничних умов, ураховуючи (50, 51, 59, 65), отримуємо таке інтегральне рівняння:

$$U_0^{+}(y,0)+\frac{1}{L}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^{+}(y,t)\cdot F(t)\,dt=\frac{1}{d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^{-}(y,t)\cdot F(t)dt,\tag{67}$$

яке еквівалентне до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР):

$$\frac{dU_0^{+}(y,0)}{dy}+\frac{1}{L}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dK^{+}(y,t)}{dy}\cdot F(t)\,dt=\frac{1}{d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,K^{-}(y,t)}{dy}\cdot F(t)dt,\qquad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\tag{68}$$

$$U_0^{+}(y_0,0)+\frac{1}{L}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^{+}(y_0,t)\cdot F(t)\,dt=\frac{1}{d}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^{-}(y_0,t)\cdot F(t)dt,\tag{69}$$

де y_0 – фіксована точка інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Система рівнянь (68–69) аналогічна до ССІР, яка зустрічалася при розв'язанні задач дифракції на ідеально провідних структурах [3], ефективним методом розв'язання яких є метод дискретних особливостей.

Висновки

1. Побудовано новий алгоритм чисельного розв'язання задачі дифракції електромагнітних хвиль на не ідеально провідній гребінці.
2. Запропоновано новий спосіб подання інтегральних виразів полів, який спрощує чисельне розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Ильинский А. С. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями / А. С. Ильинский, Г. Я. Слепян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 232 с.
2. Кравченко В. Ф. Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике / В. Ф. Кравченко, А. Б. Казаров. // Радиотехника. Зарубежная радиоэлектроника. –1997. – № 11. – С. 59–78.
3. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Х. : Изд-во Харьк. ун-та. – 1994. – 359 с.
4. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Morozova N. N. Electromagnetic Wave Diffraction on a Lattice of Thin Superconducting Bands // Electromagnetic Waves & Electron Systems. – 1997. – Vol. 2, No. 1
5. Душкин В.Д. Решение двухмерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов / В. Д. Душкин // Доп. НАН України. – 1999. – № 9. – С. 11–15.
6. Душкин В. Д. Нахождение комплексных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, которая возникает при решении задач дифракции / В. Д. Душкин // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления, 2007. – № 775. Вып. 7. – С. 152–158.
7. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. / В. А. Марченко. – Киев : Наук. думка, 1972. – 220 с.

Стаття надійшла до редакції 29.12.2008 р.