УДК 519.9

І. І. Сидоренко

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДЛЯ ОТРИМАННЯ ПРИПУЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Розглянуто метод отримання припущення індукції на основі властивостей числових послідовностей.

Загальна постановка проблеми. Як відомо, метод математичної індукції – це один із найпотужніших апаратів доведення тверджень математики і поширений у багатьох галузях математики: алгебра і теорія чисел, математичний аналіз, дискретна математика та ін. Цей метод ґрунтується на відомому принципі математичної індукції [1, 2] і складається із двох частин: у першій доводиться справедливість деякого твердження $B(n)$ при n=1, а у другій припускається, що твердження $B(n)$ виконується для n=k, а далі доводиться, що твердження $B(n)$ справедливе для n=k+1. Після цього робиться висновок, що твердження $B(n)$ істинне при будь-якому $n \in N$. Наприклад, довести, яка сума послідовності, що складається з перших n ($n \in N$) непарних чисел дорівнює квадрату їх числа:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 .$$

Цей факт нескладно довести за методом математичної індукції і в такому разі права частина рівності являє собою припущення індукції (гіпотезу). Проте залишається невідомим, як саме воно було знайдене, і підтвердженням цього є багато задач такого типу: найскладніше не доведення, а знаходження компактного вигляду суми числової послідовності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проведений аналіз джерел [1–4] показав, що задача отримання припущення індукції як суми числової послідовності може бути зведена до пошуку суми числового ряду з додатними членами. Проте знаходження суми числового ряду через границю n-ї часткової суми ряду S_n є досить простим лише в окремих випадках: коли числовий ряд являє собою геометричну (арифметичну) прогресію, або коли обчислення часткових сум ряду $s_1, s_2, ..., s_n$ завдяки простим алгебраїчним перетворенням приводить до загальної формули n-ї часткової суми ряду S_n. У значній кількості випадків знайти таку загальну формулу досить складно, і дослідження числових рядів на збіжність здійснюється за відомими ознаками.

Мета статті – визначити метод, який дозволяє знайти припущення індукції як суму числової послідовності.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо числову послідовність $a_1, a_2, ..., a_n$. Як відомо, така послідовність є функцією натурального аргументу $a_n = f(n)$ [1-4].

Визначення. Послідовність (a_n) називається послідовністю m-го степеня, якщо існує такий багаточлен степеня m:

$$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m ,$$

що $a_n = P_m(n), \forall n, m \in N$.

Нехай задано послідовність (a_n). Утворимо нову послідовність $(\Delta^{(k)}a_n)$ за таким правилом: $\Delta^{(1)}a_n = a_{n+1} - a_n$, $\Delta^{(2)}a_n = a^{(1)}{}_{n+1} - a^{(1)}{}_n$, …, $\Delta^{(k)}a_n = a^{(k-1)}{}_{n+1} - a^{(k-1)}{}_n$, $\forall$ k =1, 2, … , m; m, $n \in N$. Послідовність $(\Delta^{(k)}a_n)$ будемо називати послідовністю k-х різниць послідовності (a_n).

З огляду на таке визначення саму послідовність (a_n) можна вважати послідовністю $(\Delta^{(0)}a_n)$.

Доведемо, що для послідовності (a_n)=(n^m) послідовність перших різниць $(\Delta^{(1)}a_n)$ є послідовністю m–1-го степеня, причому

$$\Delta^{(1)}a_n = mn^{m-1} + d_1n^{m-2} + ... + d_{m-1} . \quad (1)$$

Доведення: розглянемо $\Delta^{(1)}a_n = (n+1)^m - n^m = n^m((1+\frac{1}{n})^m - 1) = = n^{m-1}\frac{(1+\frac{1}{n})^m - 1}{(1+\frac{1}{n}) - 1}$. Дріб в останньому виразі є сумою m–1 члена геометричної прогресії зі знаменником $1+\frac{1}{n}$ і першим членом 1. Отже,

$$\Delta^{(1)}a_n = n^{m-1}(1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})^2+...+(1+\frac{1}{n})^{m-1}). \qquad (2)$$

Згідно з розкладанням бінома Ньютона

$$(1+\frac{1}{n})^m = 1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+...+\frac{c_m}{n^m},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathrm{N}$.

Тому, збираючи коефіцієнти при однакових степенях у рівнянні (2), отримаємо:

$$\Delta^{(1)}a_n = mn^{m-1} + d_1 n^{m-2} + ... + d_{m-1}.$$

З формули (1) можна побачити, що

$$\Delta^{(m)}a_n = a_0 m!, \text{ де } a_0 \in Z. \qquad (3)$$

Метод отримання припущення індукції ґрунтується на такій теоремі.

Т е о р е м а. Для того, щоб (a_n) була послідовністю m-го степеня, необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$(\Delta^{(k)}a_n) = (c),\ c \neq 0. \qquad (4)$$

Доведення

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $a_n = b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + ... + b_{m-1}n + b_m$. Тоді

$$\Delta^{(1)}a_n = b_0((n+1)^m - n^m) + b_1((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) + ... + b_{m-1}.$$

Згідно з (1) у дужках стоять багаточлени m–1-го, m–2-го і т.д. степеня, причому найстарший із них – m–1-й – тільки один, у першій дужці. Отже, послідовність ($\Delta^{(1)}a_n$) є послідовністю m–1-го степеня. Утворюючи й далі різниці, дістанемо, що ($\Delta^{(2)}a_n$) є послідовністю степеня m–2 і, нарешті, ($\Delta^{(m)}a_n$) буде послідовністю 0-го степеня з деяким коефіцієнтом $c \neq 0$ при старшому степені, тобто ($\Delta^{(m)}a_n$)=(c).

Д о с т а т н і с т ь. Тепер нехай відомо, що

$$\Delta^{(k+1)}a_n = \Delta^{(k)}a_{n+1} - \Delta^{(k)}a_n = c_0 n^m + c_1 n^{m-1} + ... + c_m.$$

Далі:

$$\Delta^{(k)}a_{n+1} = \Delta^{(k)}a_n + c_0 n^m + c_1 n^{m-1} + ... + c_m,$$
$$\Delta^{(k)}a_n = \Delta^{(k)}a_{n-1} + c_0(n-1)^m + c_1(n-1)^{m-1} + ... + c_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^{(k)}a_2 = \Delta^{(k)}a_1 + c_0 1^m + c_1 1^{m-1} + ... + c_m. \qquad (5)$$

Здійснивши перетворення, отримаємо:

$$\Delta^{(k)}a_{n+1} = c_0(1^m + 2^m + ... + (n-1)^m + n^m) +$$
$$+ c_1(1^{m-1} + 2^{m-1} + ... + (n-1)^{m-1} + n^{m-1}) + ... + nc_m + \Delta^{(k)}a_1.$$

Якщо показати, що $1^m + 2^m + ... + (n-1)^m + n^m$ є багаточленом m+1-го степеня від n, то теорему буде доведено.

Розглянемо вираз $(n+1)^{m+1}$:

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + d_0 n^m + d_1 n^{m-1} + \ldots + 1,$$
$$n^{m+1} = ((n-1)+1)^{m+1} = (n-1)^{m+1} + d_0(n-1)^m + d_1(n-1)^{m-1} + \ldots + 1,$$
$$(n-1)^{m+1} = ((n-2)+1)^{m+1} = (n-2)^{m+1} + d_0(n-2)^m + d_1(n-2)^{m-1} + \ldots + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2^{m+1} = (1+1)^{m+1} = 1^{m+1} + d_0 \cdot 1^m + d_1 \cdot 1^{m-1} + \ldots + 1.$$

Після відповідних перетворень отримаємо:

$$(n+1)^{m+1} = d_0(n^m + (n-1)^m + (n-2)^m + \ldots + 1^m) + d_1(n^{m-1} + (n-1)^{m-1} + (n-2)^{m-1} + \ldots + 1^{m-1}) + \ldots + (n+1).$$

З цього рівняння маємо

$$(n^m + (n-1)^m + (n-2)^m + \ldots + 1^m) = \frac{1}{d_0}(n+1)^{m+1} - \frac{d_1}{d_0}(n^{m-1} + (n-1)^{m-1} + (n-2)^{m-1} + \ldots + 1^{m-1}) - \ldots - \frac{1}{d_0}(n+1). \qquad (6)$$

Ліва частина рівності (6) при $m=1$ є послідовністю 1-го степеня і являє собою арифметичну прогресію $1+2+\ldots+n$ з першим членом $a_1 = 1$ і різницею $d = 1$. Сума *n* членів такої прогресії дорівнює $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{(1+n)n}{2}$ і цей вираз є багаточленом 2-го степеня. З цього можемо зробити висновок, що для $m \geq 2$ ліва частина рівняння (6) є багаточленом степеня $m+1$.

Отже, якщо $(\Delta^{(m)} a_n) = (c)$ – послідовність 0-го степеня, то $(\Delta^{(0)} a_n) = (a_n)$ є послідовністю *m*-го степеня. Теорему доведено.

Зауважимо, що з (3) та (5)

$$c = b_0 m\,! \qquad (7)$$

П р и к л а д. Знайти суму $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Розв'язання. Позначимо $(a_n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. Обчислимо кілька перших членів послідовності (a_n) й утворимо послідовності її *m*-х різниць:

$$(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots),$$
$$(\Delta^{(1)} a_n) = (3, 5, 7, 9, 11, \ldots),$$
$$(\Delta^{(2)} a_n) = (2, 2, 2, 2, \ldots).$$

Виникає гіпотеза, що послідовність (a_n) є послідовністю 2-го степеня $(a_n) = b_0 n^2 + b_1 n + b_2$. Причому, згідно з (7) $2 = b_0\, 2!$ Звідки $b_0 = 1$.

Для знаходження коефіцієнтів b_0 і b_1 треба розв'язати систему лінійних рівнянь будь-яким із відомих у курсі лінійної алгебри методів:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \cdot 1^2 + b_1 \cdot 1 + b_2, \\ a_2 = 1 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_2. \end{cases}$$

З урахуванням того, що $a_1 = 1, \quad a_2 = 4$, система набуде вигляду: $\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1^2 + b_1 \cdot 1 + b_2, \\ 4 = 1 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_2. \end{cases}$

Розв'язком цієї системи є пара чисел $b_1 = b_2 = 0$. У рівняння $(a_n) = b_0 n^2 + b_1 n + b_2$ підставимо знайдені коефіцієнти b_0, b_1, b_2 і отримаємо припущення індукції $(a_n) = n^2$.

Тепер залишається довести методом математичної індукції правильність цієї гіпотези.

Висновки

Наведений вище метод може застосовуватись у теорії рядів і дозволяє досліджувати ряд із додатними членами на збіжність за визначенням збіжності ряду. Слід також зауважити, що цей метод не є дійсним, якщо числова послідовність являє собою геометричну прогресію.

Список використаних джерел

1. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел / С. Т. Завало, С. С. Левищенко, В. В. Пилаєв., І. О. Рокицький. – К. : Вища шк. 1986. – 263 с.
2. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – М. : Наука, 1965. – 572 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – Т. II. – М. : Наука, 1993. – 560 с.
4. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – К. : Вища шк., 1993. – 375 с.

Стаття надійшла до редакції 23.03.2009 р.