УДК 539.3

В. А. Сало

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ СУЧАСНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Запропоновано варіаційний підхід до визначення напружено-деформованого стану відповідальних елементів конструкцій із сучасних матеріалів. Чисельно-аналітичний RVR-метод, що використовується в роботі, ґрунтується на варіаційному принципі Рейсснера, методі І. Н. Векуа, теорії R-функцій та загальних рівняннях тривимірної теорії пружності. Ефективність методу показана на чисельних прикладах.

Постановка проблеми. Перспективи сучасного прогресу в машинобудуванні пов'язані, головним чином, з розробленням і застосуванням неоднорідних за своєю структурою композиційних матеріалів (композитів) [1], що відкриває широкі можливості як для удосконалювання існуючих конструкцій найрізноманітнішого призначення, так і для розроблення нових конструкцій і технологічних процесів. Інтенсивне використання у сучасній інженерній та військовій практиці композитів у відповідальних оболонкових елементах конструкцій обумовлено, насамперед, можливостями композитів, а саме: високими питомими міцністю і жорсткістю, низькою щільністю, високою технологічністю виготовлення цільних великогабаритних виробів, реалізацією в процесі виробництва конструкцій спрямованого рівня фізико-механічних властивостей сучасних матеріалів.

Зазначені можливості дозволяють у процесі виготовлення конструкцій з композиційних матеріалів істотно знизити їхню масу та підвищити експлуатаційні характеристики. Щоб реалізувати такі можливості, необхідні уміння прогнозувати і проектувати фізико-механічні властивості композитів [1, 2], а також ефективні й надійні методи розрахунку напружено-деформованого стану елементів конструкцій, виготовлених з матеріалів неоднорідної структури.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У науковій літературі накопичено значний обсяг матеріалу з чисельних методів розрахунку на міцність і жорсткість пружних оболонок та розроблено велику кількість різноманітних і нерідко суперечних один одному варіантів прикладних теорій оболонок. Таке різноманіття створює певні утруднення у виборі й практичному застосуванні конкретної уточненої теорії оболонок. Водночас механіка композитів наразі перебуває у стадії розвитку й становлення; тому розроблення ефективних методів розрахунку на міцність і жорсткість неоднорідних пружних елементів є актуальною проблемою, розв'язання якої має важливе наукове й практичне значення. Математичні й обчислювальні труднощі, які доводиться долати у процесі розгляду конкретних задач неоднорідних пластин та оболонок, незмірно складніші, ніж ті, що існують у аналогічних задачах для однорідних об'єктів, тому що внаслідок неоднорідних властивостей матеріалу у відповідних рівняннях з'являються змінні коефіцієнти, які залежать від координат досліджуваної пружної області.

Для розв'язання цієї проблеми пропонується використовувати розроблений автором ефективний чисельно-аналітичний RVR-метод [3], що ґрунтується на застосуванні варіаційного принципу Рейсснера, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності, методу І. Н. Векуа, алгоритму двостороннього оцінювання точності наближених розв'язків змішаних варіаційних задач і математичного апарата теорії R-функцій, за допомогою яких на аналітичному рівні враховується геометрична інформація крайових задач і будуються структури розв'язків, що точно задовольняють усім геометричним і статичним крайовим умовам тривимірної задачі.

Одна з перспективних можливостей запропонованого у монографії [3] RVR-методу пов'язана з його застосуванням для розрахунку неоднорідних оболонок у випадку залежностей пружних характеристик матеріалу від координат точок тіла у вигляді відомих функцій. Безпосереднє підставляння у варіаційне рівняння Рейсснера аналітичних виразів цих функцій і відповідних структур розв'язків, а також використання алгоритму регулярного процесу уточнення моделі розглянутої оболонки дозволяють успішно досліджувати напружено-деформований стан неоднорідної пружної області оболонкового або пластинчастого елемента досліджуваної конструкції.

Мета статті полягає в отриманні за допомогою RVR-методу нових кількісних і якісних закономірностей напружено-деформованого стану послаблених отворами довільних розмірів і форм анізотропних оболонок із сучасних матеріалів, які мають неоднорідні за товщиною властивості.

Виклад основного матеріалу. У розрахунковій інженерній практиці під час розв'язання різної складності крайових задач теорії пружності все більша увага приділяється змішаним варіаційним постановкам, що будуються на основі функціонала Рейсснера $\mathbf{I}_R$ за умови незалежної апроксимації вектора переміщення $\mathbf{u}$ й тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$. У монографії [3] обґрунтовано доцільність застосування для розв'язання досліджуваних задач принципу Рейсснера, наведено аналітичні вирази різних форм функціонала Рейсснера $\mathbf{I}_R$, основна форма якого в декартовій системі координат x_i ($i=\overline{1,3}$) має вигляд

$$\mathbf{I}_R=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-W\left(\sigma_{ij}\right)-u_iF_i\right]d\Omega-\int\limits_{\Gamma_u}\left(u_i-u_i^*\right)\sigma_{ij}n_jd\Gamma-\int\limits_{\Gamma_\sigma}t_iu_id\Gamma, \tag{1}$$

де u_i і σ_{ij} – компоненти вектора переміщення $\mathbf{u}$ і тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$; $W\left(\sigma_{ij}\right)$ – пружний потенціал; F_i – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{F}$; n_j – компоненти одиничного вектора $\mathbf{n}$ зовнішньої нормалі до граничної поверхні Γ досліджуваної просторової області Ω.

Границя Γ складається з частин Γ_u і Γ_σ, на яких задані переміщення u_i^* і компоненти t_i вектора поверхневих напружень $\mathbf{t}$:

$$u_i\big|_{\Gamma_u}=u_i^*;\qquad \sigma_{ij}n_j\big|_{\Gamma_\sigma}=t_i. \tag{2}$$

У функціоналі (1) незалежно варіюються вектор $\mathbf{u}$ і тензор $\boldsymbol{\sigma}$, а в точці стаціонарності має місце $\min_u\max_\sigma\mathbf{I}_R$.

Варіаційний принцип Рейсснера полягає в тому, що варіаційне рівняння Рейсснера (умова стаціонарності функціонала $\mathbf{I}_R$)

$$\delta\mathbf{I}_R=\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-a_{ijkl}\sigma_{kl}\right]\delta\sigma_{ij}-\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i\right)\delta u_i\right\}d\Omega- \\ -\int\limits_{\Gamma_u}\left(u_i-u_i^*\right)n_j\,\delta\sigma_{ij}\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_\sigma}\left(\sigma_{ij}n_j-t_i\right)\delta u_i\,d\Gamma=0 \tag{3}$$

еквівалентне умовам (2), рівнянням рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=0 \tag{4}$$

і співвідношенням між σ_{ij} і компонентами ε_{ij} тензора деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$, у яких ε_{ij} виражені відповідно до співвідношень Коші через компоненти u_i:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-a_{ijkl}\sigma_{kl}=0, \tag{5}$$

де a_{ijkl} – компоненти тензора піддатливості $\mathbf{a}$ матеріалу оболонки.

Розглянемо оболонку з неоднорідною за товщиною структурою. Крайові задачі для таких оболонок розглянуто у роботах [4 - 6], зокрема у [5] за методом І. Н. Векуа отримані рівняння рівноваги неоднорідної ізотропної сферичної оболонки сталої товщини, а у [6] досліджено напружений стан неоднорідної за товщиною пологої трансверсально-ізотропної сферичної оболонки із круговим отвором, на бічній поверхні якого прикладені тангенціальні дотичні напруження, що нелінійно змінюються.

Без обмеження спільності в дослідженні оболонки багатомірної неоднорідної структури будемо вважати, що коефіцієнти Пуассона ν_{ij} сталі, а модулі пружності E_i і зсуву G_{ij} (за умови $i \neq j = \overline{1,3}$) – довільні функції поперечної координати ζ ($\left|\zeta\right| \le 1$):

$$E_i = E_i^0 f_i\left(n,\delta,\zeta\right); \quad G_{ij} = G_{ij}^0 f_{ij}\left(n,\delta,\zeta\right), \tag{6}$$

де E_i^0, G_{ij}^0 – сталі величини; n, δ – параметри, що характеризують неоднорідність матеріалу.

У роботі [6], наприклад, $f_i\left(n,\delta,\zeta\right)$ і $f_{ij}\left(n,\delta,\zeta\right)$ – лінійні (за умови $n = 1$) функції товщинної координати ζ, а у [7] наведені приклади різних законів зміни модуля зсуву й коефіцієнта Пуассона від однієї декартової координати у процесі побудови так званих «загальних розв’язань» рівнянь теорії пружності неоднорідних середовищ.

Відзначимо, що одномірний варіант (6) неоднорідності – один з найпоширеніших у науковій літературі, водночас розгляд більш загальної (наприклад, від трьох координат) залежності пружних характеристик матеріалу оболонки не додає принципових утруднень у використання розробленого чисельно-аналітичного RVR-методу. Більш складний, ніж (6), функціональний вид залежності величин ν_{ij}, E_i і G_{ij} може створити у випадку використання запропонованого методу [3] лише технічні труднощі програмної чисельної реалізації розглянутої крайової задачі.

Залежно від конкретного матеріалу досліджуваної неоднорідної оболонки аналітичні вирази для функцій $f_i\left(n,\delta,\zeta\right)$ і $f_{ij}\left(n,\delta,\zeta\right)$ можуть набирати різного вигляду. Щоб певною мірою охопити якісне різноманіття можливого характеру зміни уздовж однієї координати пружних характеристик матеріалу, розглянемо аналітичні залежності E_i (аналогічно G_{ij}):

степеневий закон зміни

$$E_i = E_i^0\left[1 + \delta\left(1+\zeta\right)^n\right]; \tag{7}$$

експонентний закон зміни

$$E_i = E_i^0\, e^{\delta\left(1+\zeta\right)^n}; \tag{8}$$

експоненціально-степеневий закон зміни

$$E_i = E_i^0 \frac{e^{1+\zeta}}{1 + \delta\left(1+\zeta\right)^n}; \tag{9}$$

логарифмічний закон зміни

$$E_i = E_i^0\left\{1 + \ln\left[1 + \delta\left(1+\zeta\right)^n\right]\right\}. \tag{10}$$

Якісний розподіл функції $f_i\left(n,\delta,\zeta\right) = E_i / E_i^0$ (за умови $f_{ij} = f_i$) уздовж товщини ($\left|\zeta\right| \le 1$) оболонки показаний на рис. 1. У випадку збільшення або зменшення модуля пружності у два рази для зручності порівняння й аналізу одержуваних результатів параметр δ приймає для кожної з розглянутих функцій $f_i(n,\delta,\zeta)$ таке чисельне значення, за якого виконується рівність $E_i\big|_{\zeta=1} = 2E_i^0$ (або $E_i\big|_{\zeta=1} = 0.5E_i^0$). Позначення s, e, es, $\ln$ на рис. 1 відповідають степеневому, експонентному, експоненціально-степеневому і логарифмічному законам зміни співвідношення E_i/E_i^0; суцільними лініями зображені графіки для значення показника степеня

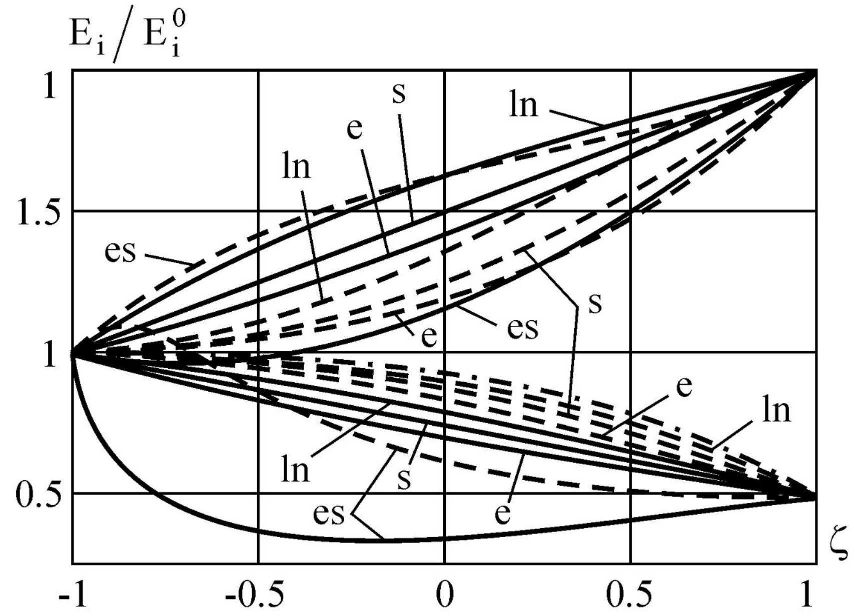

Рис. 1. Розподіл E_i/E_i^0 уздовж товщини ζ

$n = 1$, штриховими – для $n = 2$, штрихпунктирними – для $n = 3$.

Розглянемо напружено-деформований стан навантаженої сталим внутрішнім тиском q_0 неоднорідної сферичної оболонки з параметрами, розглянутими в роботі [8]. Уведемо в серединній поверхні Ω_s радіуса R оболонки (рис. 1 [8]) систему координат $\{\theta, \varphi, z\}$. Поверхня Γ оболонки складається з бічних поверхонь Γ_s ($\theta = \theta_s$, $s = 1,2$) двох полюсних кругових отворів однакового радіуса r_0 та лицьових $\Gamma^{\pm}$ ($\zeta = \pm 1$ за умови $\zeta = 2z/h$) поверхонь. Отвори закриті кришками такої конструкції, яка передає на оболонку тільки дію перерізуючої сили $Q_\theta^* = -0.5q_0 r_0$. Вважаємо, що коефіцієнти Пуассона сталі ($\nu_{ij} = 0.3$), а модулі пружності E_i і зсуву G_{13} – функції товщинної координати ζ, які описує вираз (6), де сталі величини E_i^0 та G_{13}^0 набувають значень пружних характеристик однорідної оболонки:

$$E_1^0 = E_3^0 = 20E_0; \quad G_{13}^0 = E_0; \quad E_0 = 1\ \text{ГПа}. \qquad (11)$$

Функції $f_i(n,\delta,\zeta)$ і $f_{ij}(n,\delta,\zeta)$ у виразах (6) можуть приймати для конкретного матеріалу неоднорідної оболонки різний вигляд. Зокрема, зупинимося на використовуваних нами у чисельних розрахунках наступних варіантах розподілу (при заданих значеннях параметрів n і δ) функцій $f_i(\zeta) = E_i/E_i^0$ (аналогічно $f_{ij}(\zeta) = G_{ij}/G_{ij}^0$) уздовж товщини оболонки:

$$\left.\begin{aligned} &(a):\ f_i(\zeta)=1-0.25(1+\zeta); \qquad (b):\ f_i(\zeta)=1-0.0625(1+\zeta)^3; \\ &(c):\ f_i(\zeta)=e^{0.25\,(1+\zeta)^2\ln 2}; \qquad (d):\ f_i(\zeta)=\frac{e^{1+\zeta}}{1+\left(e^2-0.5\right)(1+\zeta)}; \\ &(e):\ f_i(\zeta)=1+\ln\left[1+0.5(e-1)(1+\zeta)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Отже, функція $f_i(\zeta)$ має лінійний (12a), кубічний (12b), експонентний (12c), експоненціально-степеневий (12d) або логарифмічний (12e) закони зміни уздовж товщини оболонки. Уведемо в розгляд безрозмірну координату $r_\theta = \left(r_0 + (\theta-\theta_1)R\right)/r_0$ та зведені переміщення $\tilde{u}_i$ і напруження $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{u}_i = 100u_i/h, \qquad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/q_0, \tag{13}$$

що набирають за умови $\zeta=-1$, $\zeta=0$ або $\zeta=1$ вигляду $\tilde{u}_i^-$, $\tilde{u}_i^0$ або $\tilde{u}_i^+$ відповідно (аналогічно $\tilde{\sigma}_{ij}^-$, $\tilde{\sigma}_{ij}^0$ або $\tilde{\sigma}_{ij}^+$).

Позначимо $p_0 = q_0R/2h$. Зведені напруження, що визначають за формулами (13), збігаються з точністю до множника $2h/R$ з використовуваними в літературі коефіцієнтами концентрації k_θ та k_φ:

$$k_\theta = \frac{\sigma_\theta}{p_0} = \frac{\sigma_{11}}{q_0}\frac{2h}{R} = \tilde{\sigma}_{11}\frac{2h}{R}; \qquad k_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{p_0} = \frac{\sigma_{22}}{q_0}\frac{2h}{R} = \tilde{\sigma}_{22}\frac{2h}{R}, \tag{14}$$

які за умови $\zeta=-1$, $\zeta=0$ і $\zeta=1$ набирають вигляду $k_\theta^- = \sigma_{11}^-/p_0$, $k_\theta^0 = \sigma_{11}^0/p_0$ і $k_\theta^+ = \sigma_{11}^+/p_0$ відповідно (аналогічно для коефіцієнта k_φ).

Чисельна реалізація дослідженої задачі. Для сформульованої крайової задачі скористаємося аналітичним виразом змішаного варіаційного рівняння Рейсснера (3) і поданими в роботі [3]

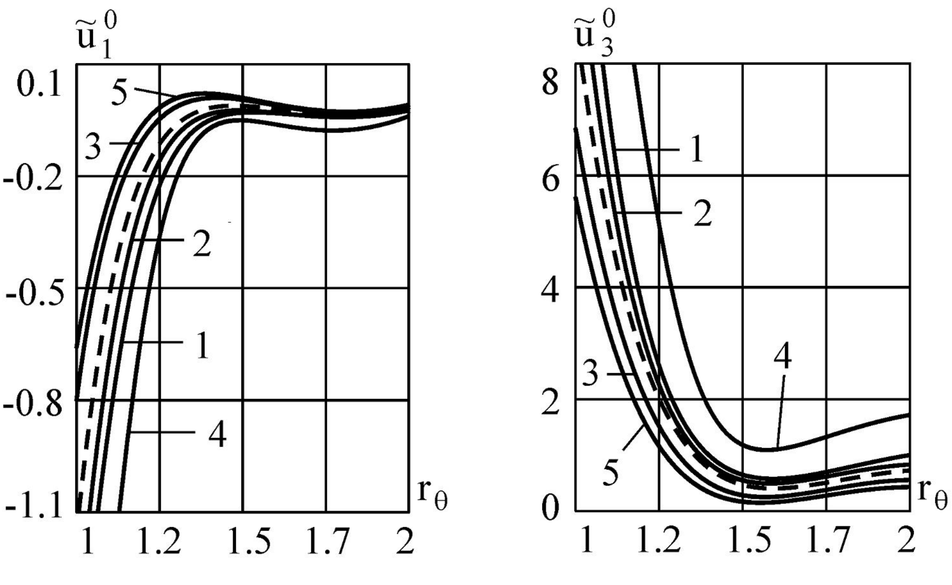

Рис. 2. Графіки переміщень $\tilde{u}_1^0$, $\tilde{u}_3^0$ ($h/R = 0.05$)

структурами розв'язків шуканих компонентів переміщень u_i і напружень σ_{ij}.

У результаті чисельної реалізації задачі для сферичної оболонки з неоднорідною за товщиною

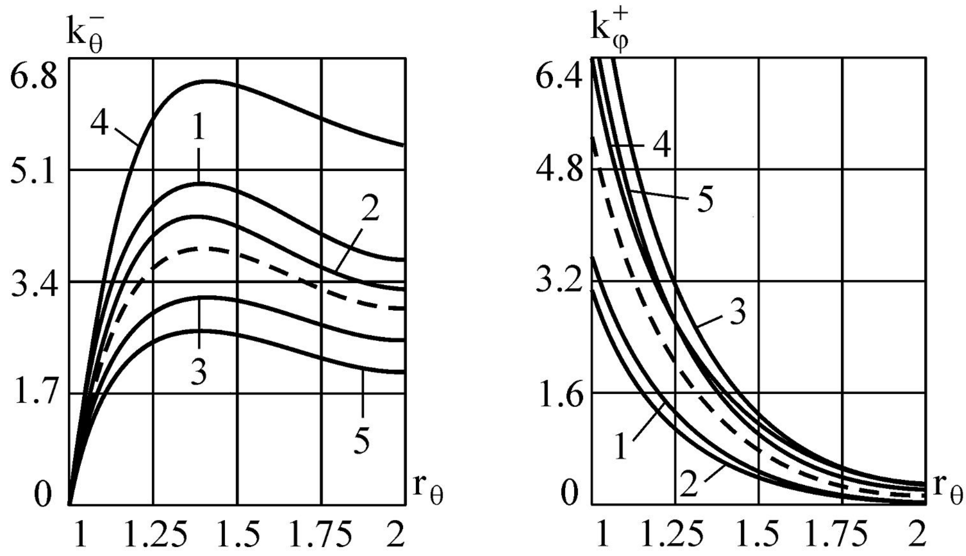

Рис. 3. Графіки коефіцієнтів k_θ^-, k_φ^+ ($h/R = 0.2$)

структурою на рис. 2 для трансверсально-ізотропної ($E_2 = E_1$) оболонки середньої ($h/R = 0.05$) товщини, а також на рис. 3 для ортотропної ($E_2 = 0.5E_1$) товстостінної ($h/R = 0.2$) оболонки уздовж безрозмірної координати r_θ показані графіки розподілу переміщень $\tilde{u}_1^0$, $\tilde{u}_3^0$ (8) і коефіцієнтів k_θ^-, k_φ^+ (9) концентрації напружень у випадку використання розглянутих залежностей (12) і зсувної моделі оболонки п'ятого порядку наближення [3].

Цифри 1, 2, 3, 4 і 5 на графіках (рис. 2 і 3) відповідають графікам s_1 (12a), s_3 (12b), e_2 (12c), es_1 (12d) і ln_1 (12e), штриховою лінією показаний графік для однорідної оболонки.

Висновки

Представлені результати підтверджують можливість ефективного використання запропонованого в монографії [3] науково обґрунтованого й універсального чисельно-аналітичного RVR-методу розрахунку тривимірного напружено-деформованого стану статично навантажених оболонкових пружних елементів конструкцій з неоднорідною за товщиною структурою. Автором отримано суттєво нові наукові результати, що становлять не тільки теоретичний, а і практичний інтерес для встановлення кількісних і якісних закономірностей впливу неоднорідності матеріалу на концентрацію напружень і розподіл переміщень та напружень за товщиною анізотропних оболонок.

Як показують численні дослідження, у процесі розрахунку оболонки з нелінійним законом зміни пружних характеристик за товщиною для одержання достовірних результатів варто використовувати модель уточненої теорії, порядок наближення якої залежить від ступеня відхилення розподілу пружних характеристик від лінійного закону. Надійним засобом перевірки вірогідності одержуваних чисельних результатів може бути використовуваний автором програмно реалізований алгоритм [3] інтегральної двоїстої оцінки чисельних розв'язків, який дозволяє автоматизувати пошук такої кількості апроксимацій, за якої процес збіжності отриманих наближених розв'язків набуває усталеного характера.

Список використаних джерел

1. Васильев В. В. Композиционные материалы: моногр. / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин. – М. : Машиностроение, 1990. – 512 с.

2. Карпов Я. С. Механика композиционных материалов: моногр. / Я. С. Карпов. – Х. : НАКУ им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, 2001. – 122 с.

3. Сало В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями: моногр. / В. А. Сало. – Х. : НТУ “ХПИ”, 2003. – 216 с.

4. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородных тел: моногр. / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова. – К. : Наук. думка, 1991. – 216 с.

5. Жгенти В. С. К исследованию напряженного состояния изотропных толстостенных оболочек неоднородной структуры / В. С. Жгенти // Прикл. механика. – К., 1991. – Т. 27, № 5. – С. 37–44.

6. Хома И. Ю. Напряженное состояние неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговой полостью при нелинейно изменяющихся касательных напряжениях / И. Ю. Хома // Прикл. механика. – К., 1996. – Т. 32, № 12. – С. 55–63.

7. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред: моногр. / В. П. Плевако. – Х. : Основа, 1997. – 160 с.

8. Сало В. А. О концентрации напряжений около отверстия в упругой сферической оболочке / В. А. Сало // Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского. – Х. : НАКУ им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, 2004. – Вып. 37 (2). – С. 66–72.

Стаття надійшла до редакції 09.02.2010 р.