УДК 517.958

В. Д. Душкін

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ НА ІМПЕДАНСНОМУ ЕКРАНІ ЗІ ЩІЛИНАМИ, РОЗТАШОВАНОМУ НА ЕКРАНОВАНОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ ШАРІ

Початкова задача розсіювання H-поляризованої хвилі на імпедансній відбиваючій структурі зведена до системи граничних інтегральних рівнянь першого і другого роду. У виведенні інтегральних рівнянь застосований метод параметричних перетворень інтегральних операторів.

К л ю ч о в і   с л о в а: імпедансні відбиваючі структури, крайові умови третього роду, метод параметричних інтегральних перетворень.

Постановка проблеми та її актуальність. Необхідність урахування поглинання енергії в матеріалі у процесі моделювання процесів збудження резонансних систем зумовлює створення математичних моделей, що враховують кінцеву провідність матеріалів [1]. Математично наявність втрат енергії часто описується за допомогою умови Щукіна – Леонтовича на поверхні не ідеально провідних екранів [2]:

$$[nE] = -Z_s \cdot [n[nH]], \tag{1}$$

де (E,H) – повне електромагнітне поле; Z_s – поверхневий імпеданс структури; n – зовнішня нормаль до поверхні.

Значна частина застосовуваних у техніці електродинамічних пристроїв складається з діелектричних шарів різних матеріалів, розділених плоскими металевими екранами зі щілинами. Тому побудова математичних моделей процесів розсіювання електромагнітних хвиль на цих структурах, що враховують кінцеву провідність екранів, є актуальним завданням для дослідників.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Один з ефективних способів побудови математичних моделей електродинамічних систем полягає у використанні методу параметричних сингулярних інтегральних перетворень [3; 4]. Цей метод дозволяє звести вихідні крайові задачі до еквівалентних систем інтегральних рівнянь. Отримані системи інтегральних рівнянь чисельно розв'язують за методом дискретних особливостей [5; 6; 8].

За допомогою такого підходу проведено дослідження розсіювання електромагнітних хвиль надпровідними стрічками [7; 8] та дифракції електромагнітної хвилі на плоскому півнескінченному хвилеводі з надпровідним фланцем [9].

Мета статті – побудова математичної моделі розсіювання *H*-поляризованої хвилі на відбиваючій імпедансній структурі, що складається з екрана зі щілинами, розташованого на екранованому діелектричному шарі, на базі системи граничних інтегральних рівнянь.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо дифракційну структуру (рис. 1). У площині $z=-D$ лежить нескінченний екран, на ньому розташований шар діелектрика, діелектрична проникність якого ε_1. На шарі діелектрика розташований нескінченний екран зі щілинами. Екрани виготовлені з матеріалу, що має кінцеву провідність. Над описаною структурою, в області $z>0$, – півпростір з діелектричною проникністю $\varepsilon_0 = 1$.

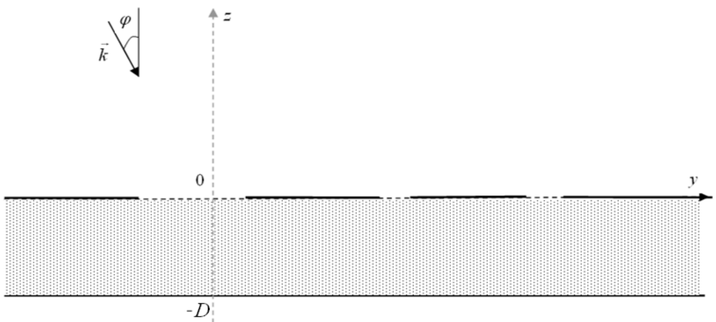

Рис. 1. Перетин електродинамічної структури площиною *YOZ*

© В. Д. Душкін

Нехай

$$L = \left\{ y \in R \middle| \, y \in \bigcup_{q=1}^{M} (\alpha_q, \beta_q) \right\}, \tag{2}$$

а y координати точок площини $z = 0$ вільні від металу.

Введемо позначення: область

$$\Omega_0 = \left\{ (y,z) \in R^2 \; \middle| \, z > 0, \, y \in R \right\} \tag{3}$$

є півпростором над структурою, область

$$\Omega_1 = \left\{ (y,z) \in R^2 \middle| \, y \in R, -D < z < 0 \right\} \tag{4}$$

є частиною простору, заповненою діелектриком.

Розглянемо стаціонарну задачу, де залежність полів від часу задається множником $e^{-i\omega t}$.

Нехай з нескінченності зверху на електродинамічну структуру похило падає H-поляризована плоска електромагнітна хвиля одиничної амплітуди:

$$U_0(y,z) = H_{0,x}(y,z) = \exp\Big(ik\left(y \cdot \sin\phi - z \cdot \cos\phi \right) \Big), \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{5}$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

У задачі необхідно знайти повне поле $u(y,z) = H_x(y,z)$, яке виникло в результаті розсіювання хвилі на розглянутій дифракційній структурі. Повне поле задовольняє в областях $\Omega_i, \; (i = 0,1)$ рівнянню Гельмгольця:

$$\Delta u + k^2 \sqrt{\varepsilon_i} \cdot u = 0, \quad (y,z) \in \Omega_i, \quad (i = 0,1) \tag{6}$$

та умові Майкснера на ребрі. Розсіяне поле – різниця повного і падаючого полів, задовольняє умові випромінювання Зоммерфельда:

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial \left(u - U_0 \right)}{\partial r} - ik \cdot \left(u - U_0 \right) \right) = 0, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \,. \tag{7}$$

У випадку H-поляризації наслідком умов Щукіна–Леонтовича є граничні співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial z} u - ik \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \, Z_s \, u = 0. \tag{8}$$

Нехай $U(y,z)$ – рішення в області $z > 0$ допоміжної крайової задачі дифракції монохроматичної хвилі $U_0(y,z)$, визначене формулою (7), на суцільному нескінченному екрані з неідеальною провідністю, який повністю заповнює площину $z = 0$.

Згідно з граничними умовами (8) виконується рівність:

$$\frac{\partial U(y,0)}{\partial z} - h \cdot U(y,0) = 0, \quad y \in R \,, \tag{9}$$

де

$$h = ik \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \, Z_s \,. \tag{10}$$

Поле

$$U(y,z) = \exp\left\{ ik\left(y \cdot \sin\phi - z \cdot \cos\phi \right) \right\} + \frac{i\kappa \cos\phi + h}{i\kappa \cos\phi - h} \cdot \exp\left\{ ik\left(y \cdot \sin\phi + z \cdot \cos\phi \right) \right\} \tag{11}$$

має властивість:

$$U(y, d_1) = \frac{2i\kappa \cos\phi}{i\kappa \cos\phi - h} \cdot \exp\left\{ ik\left(y \cdot \sin\phi \right) \right\}. \tag{12}$$

Повне поле $u(y,z)$, яке виникло в результаті розсіяння хвилі на решітці, подаємо у вигляді:

$$u(y,z) = \begin{cases} U(y,z) + u_0(y,z), & (y,z) \in \Omega_0; \\ u_1(y,z), & (y,z) \in \Omega_1. \end{cases} \tag{13}$$

Введемо позначення:

$$\gamma_i(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2 \varepsilon_i}, \quad \lambda \in R, \quad (i = 0,1) \,. \tag{14}$$

Поле $u_0(y,z)$ в області Ω_0 представимо у вигляді інтеграла Фур'є:

$$u_0(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}\cdot Z_0(\lambda,z)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda\,, \tag{15}$$

де

$$Z_0(\lambda,z)=-\frac{1}{1+h\cdot\gamma_0^{-1}(\lambda)}\cdot e^{-\gamma_0(\lambda)\cdot z}. \tag{16}$$

Функція $Z_0(\lambda,z)$ має властивість:

$$\frac{\partial}{\partial z}Z_0(\lambda,0)-h\sqrt{\varepsilon_0}\cdot Z_0(\lambda,0)=\gamma_0(\lambda)\,. \tag{17}$$

Умови випромінювання Зоммерфельда будуть виконані, якщо

$$\mathrm{Re}\big(\gamma_0(\lambda)\big)\ge 0,\quad \mathrm{Im}\big(\gamma_0(\lambda)\big)\le 0,\quad \lambda\in R\,. \tag{18}$$

Поле $u_1(y,z)$ в області Ω_1 представимо у вигляді інтеграла Фур'є:

$$u_2(y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)}\cdot Z_1(\lambda,z)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda\,. \tag{19}$$

Функція $Z_1(\lambda,z)$ має властивості:

$$\frac{\partial}{\partial z}Z_1(\lambda,0)+h\sqrt{\varepsilon_1}\cdot Z_1(\lambda,0)=\gamma_1(\lambda)\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}Z_1(\lambda,-D)-h\sqrt{\varepsilon_1}\cdot Z_1(\lambda,-D)=0\,, \tag{21}$$

та вигляд:

$$Z_1(\lambda,z)=\frac{\mathrm{ch}\big(\gamma_1(\lambda)(z+D)\big)+\Delta(\lambda)\cdot\mathrm{sh}\big(\gamma_1(\lambda)(z+D)\big)}{\big(1+\Delta^2(\lambda)\big)\cdot\mathrm{sh}\big(\gamma_1(\lambda)(D)\big)+2\Delta(\lambda)\cdot\mathrm{ch}\big(\gamma_1(\lambda)D\big)}, \tag{22}$$

$$\Delta(\lambda)=\gamma_1^{-1}(\lambda)\cdot h\sqrt{\varepsilon_1}\,. \tag{23}$$

Наслідком умов Щукіна – Леонтовича (8) на поверхні екранів є співвідношення:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0)-h\sqrt{\varepsilon_0}\cdot u_0(y,0)=0,\quad y\in CL\ =R\setminus L\,; \tag{24}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(y,0)+h\sqrt{\varepsilon_1}\cdot u_1(y,0)=0,\quad y\in CL\,. \tag{25}$$

З (24), (25) і подань полів (16), (20), (27) виходять співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in CL\,; \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C_1(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=0,\quad y\in CL\,. \tag{27}$$

З умови зв'язку полів та їх похідних на межі розділу середовищ у щілинах екранів виходять рівності:

$$U(y,0)+u_0(y,0)=u_1(y,0),\quad y\in L\,; \tag{28}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial U}{\partial z}(y,0)+\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0)\right)=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}(y,0),\quad y\in L\,. \tag{29}$$

З умов зв'язку полів на межі розділу середовищ (37–40) і подань полів (16), (20), (27) отримуємо інтегральні співвідношення:

$$U(y,0)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)\cdot Z_0(\lambda,0)}{\gamma_0(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)\cdot Z_1(\lambda,0)}{\gamma_1(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L\,; \tag{30}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial U}{\partial z}(y,d_1)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}Z_0(\lambda,0)e^{i\lambda y}d\lambda\right)=\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)}\frac{\partial}{\partial z}Z_1(\lambda,0)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L. \qquad (31)$$

Ураховуючи властивості (17), (20) функцій $Z_i(\lambda,z)$, $(i=0,1)$, рівняння (31) матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial U}{\partial z}(y,d_1)+\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}\cdot Z_0(\lambda,0)e^{i\lambda y}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_1(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}\cdot Z_1(\lambda,0)e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in L. \qquad (32)$$

Перетворимо функції, що входять в ядра інтегральних рівнянь (30) та (32), для зручності подальших перетворень:

$$\frac{Z_0(\lambda,0)}{\gamma_0(\lambda)}=-\frac{1}{\gamma_0(\lambda)+h}=-\frac{1}{\gamma_0(\lambda)}-W_0(\lambda); \qquad (33)$$

$$\frac{Z_1(\lambda,d_2)}{\gamma_1(\lambda)}=\frac{1}{\gamma_1(\lambda)}\cdot\frac{\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)+\Delta(\lambda)}{\left(1+\Delta^2(\lambda)\right)+2\Delta(\lambda)\cdot\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)}=\frac{1}{\gamma_1(\lambda)}+W_1(\lambda), \qquad (34)$$

де

$$W_0(\lambda)=-\frac{h}{\gamma_0(\lambda)(\gamma_0(\lambda)+h)}=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad \lambda\to\infty; \qquad (35)$$

$$W_1(\lambda)=\frac{1}{\gamma_1(\lambda)}\cdot\frac{\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)-1}{\left(1+\Delta^2(\lambda)\right)+2\Delta(\lambda)\cdot\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)}-$$

$$-\frac{\Delta(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)}\cdot\frac{2\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)-1+\Delta(\lambda)}{\left(1+\Delta^2(\lambda)\right)+2\Delta(\lambda)\cdot\operatorname{cth}(\gamma_1(\lambda)D)}=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad \lambda\to\infty. \qquad (36)$$

З урахуванням (33–36), перетворимо інтегральні співвідношення (30), (32), після чого вони матимуть вигляд:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)\cdot W_0(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_1(\lambda)\cdot W_1(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=U(y,0),\quad y\in L; \qquad (37)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_1(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda-$$

$$-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_1(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)}e^{i\lambda y}d\lambda+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)}\cdot e^{i\lambda y}d\lambda+$$

$$+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)\cdot W_0(\lambda,0)e^{i\lambda y}d\lambda-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_1(\lambda)\cdot W_1(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial U}{\partial z}(y,0),\quad y\in L. \qquad (38)$$

Введемо до розгляду функції:

$$F_0(y)=\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0)-h\sqrt{\varepsilon_0}\cdot u_0(y,0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_0(\lambda)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda,\quad y\in R; \qquad (39)$$

$$F(y) = \frac{\partial u_1}{\partial z}(y,0) + h\sqrt{\varepsilon_1} \cdot u_1(y,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\lambda) \cdot e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R. \tag{40}$$

Внаслідок (24–25) мають місце рівності:

$$F_0(y) = 0, \quad F_1(y) = 0. \tag{41}$$

Отже, справедливі такі Фур'є-подання:

$$C_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L F_0(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in R. \tag{42}$$

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L F_1(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in R. \tag{43}$$

За допомогою відомих інтегральних виразів функцій Бесселя і Неймана нульового порядку:

$$J_0(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(yt)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad Y_0(|y|) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(yt)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{44}$$

отримуємо співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_0(\lambda)}{\gamma_0(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{i}{2} \int_{L^+} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}|y-t|\right) F_0(t)\,dt, \tag{45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1(\lambda)}{\gamma_1(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{i}{2} \int_{L^\pm} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_1}|y-t|\right) F_1(t)\,dt, \tag{46}$$

де $H_0^1(y) = J_0(y) + i \cdot N_0(y)$ – функція Ганкеля першого роду нульового порядку.

Для зручності подальших записів введемо позначення:

$$Q_i(y,t) = \pi \int_0^{\infty} W_i(\lambda) \cos(\lambda(y-t))\,d\lambda, \quad (i = 0,1). \tag{47}$$

Зауважимо також, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_i(\lambda) \cdot W_i(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_L Q_i(y,t) F_i(t)\,dt, \quad (i = 0,1). \tag{48}$$

Враховуючи інтегральні співвідношення (44–47), переходимо від системи інтегральних рівнянь (58–61) щодо невідомих Фур'є-амплітуд $C_0(\lambda)$ і $C_1(\lambda)$ до системи інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій $F_0(y)$ і $F_1(y)$:

$$\frac{i}{2} \int_L H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}|y-t|\right) F_0(t)\,dt + \frac{1}{\pi} \int_L Q_0(y,t) F_0(t)\,dt + \frac{i}{2} \int_L H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_1}|y-t|\right) F_1(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int_L Q_1(y,t) \cdot F_1(t)\,dt = U(y,0), \quad y \in L; \tag{49}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} F_1(y) - \frac{1}{\varepsilon_0} F_0(y) + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{i}{2} \int_L H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}|y-t|\right) F_0(t)\,dt - \frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{i}{2} \int_{L^-} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_1}|y-t|\right) F_1(t)\,dt +$$

$$+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{1}{\pi} \int_L Q_0(y,t) F_0(t)\,dt - \frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{1}{\pi} \int_L Q_1(y,t) \cdot F_1(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial U}{\partial z}(y,0), \quad y \in L; \tag{50}$$

де

$$f(\xi) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial U}{\partial z}(y,0). \tag{51}$$

Виходячи з властивостей фізичних полів, шукатимемо звуження функцій $F_0(y)$ і $F_1(y)$ у вигляді:

$$F_0(y) = \frac{v_{0,q}(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q\right)\left(\beta_q - y\right)}}, \quad y \in \left(\alpha_q, \beta_q\right), \quad \left(q = 1, \ldots, M\right), \tag{52}$$

$$F_1(y) = \frac{v_{1,q}(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q\right)\left(\beta_q - y\right)}}, \quad y \in \left(\alpha_q, \beta_q\right), \quad \left(q = 1, \ldots, M\right), \tag{53}$$

де

$$v_{0,q}(y) \in C^{\eta,\psi}\left[\alpha_q, \beta_q\right], \quad \left(q = 1, \ldots, M\right), \tag{54}$$

$$v_{1,q}^{+}(y) \in C^{\eta,\psi}\left[\alpha_q, \beta_q\right], \quad \left(q = 1, \ldots, M\right), \quad \psi > 0. \tag{55}$$

Уведемо відображення:

$$g_q : [-1,1] \to \left[\alpha_q, \beta_q\right], \quad g_q(t) = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2}\tau + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \quad (q = 1, \ldots, M) \tag{56}$$

та позначення:

$$V_{0,q}(\tau) = v_{0,q}\left(g_q(\tau)\right), \quad (q = 1, \ldots, M); \tag{57}$$

$$V_{1,q}(\tau) = v_{1,q}\left(g_q(\tau)\right), \quad (q = 1, \ldots, M); \tag{58}$$

$$R_{1,q,m}(\xi, \tau) = -Q_0\left(g_q(\xi), g_m(\tau)\right) - \left(\frac{i\pi}{2} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}\left|g_q(\xi) - g_m(\tau)\right|\right) + \delta_{q,m} \ln|\tau - \xi|\right),$$
$$\left(q = 1, \ldots, M\right), \quad \left(m = 1, \ldots, M\right); \tag{59}$$

$$R_{2,q,s}(\xi, \tau) = -Q_1\left(g_q(\xi), g_s(\tau)\right) - \left(\frac{i\pi}{2} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}\left|g_q(\xi) - g_s(\tau)\right|\right) + \delta_{q,s} \ln|\tau - \xi|\right),$$
$$\left(q = 1, \ldots, M\right), \quad \left(s = 1, \ldots, M\right); \tag{60}$$

$$R_{3,q,m}(\xi, \tau) = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}} Q_0\left(g_q(\xi), g_m(\tau)\right) + \left(\frac{i\pi}{2} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}\left|g_q(\xi) - g_m(\tau)\right|\right) + \delta_{q,m} \ln|\tau - \xi|\right),$$
$$\left(q = 1, \ldots, M\right), \quad \left(m = 1, \ldots, M\right); \tag{61}$$

$$R_{4,q,s}(\xi, \tau) = -\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}} Q_0\left(g_q(\xi), g_s(\tau)\right) - \left(\frac{i\pi}{2} H_0^1\left(k\sqrt{\varepsilon_0}\left|g_q(\xi) - g_s(\tau)\right|\right) + \delta_{q,s} \ln|\tau - \xi|\right),$$
$$\left(q = 1, \ldots, M\right), \quad \left(s = 1, \ldots, M\right). \tag{62}$$

Використовуючи (56–62), перейдемо від системи інтегральних рівнянь (49), (50) на системі відрізків L до системи інтегральних рівнянь на стандартному інтервалі $(-1,\ 1)$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{V_{0,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{V_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{-1}^{1} R_{1,q,m}(\xi, \tau)\frac{V_{0,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M}\int_{-1}^{1} R_{2,q,s}(\xi, \tau)\frac{V_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -U\left(g_q(\xi), 0\right), \ |\xi| \le 1, \quad \left(q = 1, \ldots, M\right); \tag{63}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\cdot\frac{2}{\beta_q-\alpha_q}\frac{V_{1,q}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{\beta_q-\alpha_q}\frac{V_{0,q}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}-$$

$$-\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V_{0,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{V_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{3,q,m}(\xi,\tau)\frac{V_{0,m}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M}\int_{-1}^{1}R_{4,q,s}(\xi,\tau)\frac{V_{1,q}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f\Big(g_q(\xi)\Big),$$

$$|\xi|\le 1,\quad \Big(q=1,\dots,M\Big). \qquad (64)$$

Висновки

1. Отримана система інтегральних рівнянь (63–64) відрізняється від систем інтегральних рівнянь завдань дифракції на інших не ідеально провідних структурах:

– всі інтегральні рівняння залежать від декількох невідомих функцій, і розв’язувати кожне з рівнянь не можна окремо від інших;

– у системі присутні рівняння першого та другого роду.

2. Чисельне розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (63) та (64) виконується за допомогою методу дискретних особливостей [5; 6; 8] з використанням квадратурних формул інтерполяційного типу.

Надалі передбачається розглянути багатошарову електродинамічну систему, що складається з довільного кінцевого числа екранів.

Список використаних джерел

1. Ильинский, А. С. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями [Текст] / А. С. Ильинский, Г. Я. Слепян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 231 с.

2. Кравченко, В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений [Текст] / В. Ф. Кравченко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 280 с.

3. Гандель, Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики [Текст] / Ю. В. Гандель // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 65–66.

4. Gandel’, Yu. V. Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems [Text] / Yu. V. Gandel’ // Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17, 2004. – P. 57 – 62.

5. Gandel’, Yu. V. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems [Text] / Yu. V. Gandel’, I. K. Lifanov, T. S. Polyanskaya. // Differential Equations, Vol. 31, № 9, 1995. – P. 1491–1497.

6. Lifanov, I. K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices [Text] / I. K. Lifanov. – Utrecht, Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996. – 475 p.

7. Гандель, Ю. В. Рассеяние электромагнитных волн тонкой сверхпроводящей лентой [Текст] / Ю. В. Гандель, В. Ф. Кравченко, В. И. Пустовойт // Доклады РАН, 1996. – Т. 351, № 4. – С. 462–464.

8. Гандель, Ю. В. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент [Текст] / Ю. В. Гандель, В. Ф. Кравченко, Н. Н. Морозова // Электромагнитные волны и электронные системы. – М. : Радиотехника, 1997. – Т. 2, № 2. – С. 14–26.

9. Gandel’, Yu. V. Mathematic models of diffraction and radiation problem for planar waveguide with impedance with impedance flange [Text] / Yu. V. Gandel’, N. N. Morozova // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic theory, Lviv, Ukraine, 1996. – P. 88–91.

Стаття надійшла до редакції 04.01.2012 р.