УДК 623.546

Р. В. Бубенщиков

С. В. Бондаренко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОЛЬОТУ СНАРЯДА ЯК МОДИФІКОВАНА МОДЕЛЬ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ У ЯВНІЙ ФОРМІ

Подана модифікована модель матеріальної точки як математична модель польоту снаряда, в якій враховуються всі аеродинамічні сили. Орієнтація снаряда характеризується врахуванням кута нутації, а кінетична енергія обертального руху враховується через кутову швидкість снаряда навколо його осі симетрії. Показано, що модифікована модель матеріальної точки визначається додаванням неявного звичайного диференціального рівняння, що описує нутаційні коливання снаряда, які залежать від прискорення його польоту. Розкриті процедури перетворення системи диференціальних рівнянь модифікованої моделі матеріальної точки до явного вигляду, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів.

Ключові слова: снаряд, балістика, артилерійські підрозділи, математична модель, модифікована модель, аеродинамічні сили (моменти), рух снаряда, нутація, диференціальні рівняння

Постановка проблеми та аналіз публікацій. Під час виконання завдань з вогневого ураження противника в артилерійських підрозділах широко застосовуються балістичні обчислювачі, алгоритми роботи яких засновані на даних, наведених у таблицях стрільби (ТС), тобто на готових рішеннях балістичної задачі [1, 2]. Такі балістичні обчислювачі не є універсальними, мають обмежене коло задач, яке визначається наведеними числовими і довідковими даними ТС, не забезпечують оперативної адаптації їх балістичного і програмного забезпечення. Цих недоліків позбавлені балістичні обчислювачі, математичне забезпечення яких складають балістичні інтегрувальні алгоритми розрахунку установок на основі розв'язання оберненої задачі зовнішньої балістики. Алгоритм реалізує процедури визначення установок для стрільби за допомогою розв'язання (інтегрування) системи диференціальних рівнянь, які описують рух снаряда в просторі, – математичної моделі польоту снаряда із заданими початковими умовами стрільби на ЕОМ [2]. Таким чином, сучасні системи керування вогнем артилерії потребують застосування точних та швидких математичних моделей розрахунку польоту снарядів, які дозволять реалізувати балістичні інтегрувальні алгоритми.

Процес руху снаряда в повітряному середовищі можливо описати однією з трьох математичних моделей, які відрізняються одна від іншої переважно рівнем складності [2 – 5]:

– модель матеріальної точки;

– модифікована модель матеріальної точки (ММТ);

– 6DoF – модель (Six degrees of freedom) як математична модель руху твердого тіла з шістьма ступенями свободи.

У найпростішій моделі з трьома ступенями свободи – моделі матеріальної точки, снаряд розглядається як матеріальна точка, що рухається в атмосфері під дією сили тяжіння та результуючої аеродинамічної сили – сили лобового опору, направленої протилежно його руху. В проміжній моделі враховуються всі сили, спричинені взаємодією із Землею та атмосферою, крім того орієнтація снаряда характеризується кутом нутації, а кінетична енергія обертального руху враховується через кутову швидкість снаряда навколо його осі симетрії. У 6DoF-моделі (три координати польоту снаряда, три координати кутової орієнтації), снаряд розглядається як тверде тіло, що рухається в повітряному просторі з урахуванням повної рівноваги сил та моментів, які діють на його рух під впливом Землі та атмосфери. Модель складається з дванадцяти диференціальних рівнянь та містить тринадцять різних коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів. МММТ – 6 коефіцієнтів аеродинамічних сил та моментів, які найбільш сильно впливають на траєкторію польоту снаряда. Основною проблемою розроблення таких математичних моделей є визначення коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів, які стоять у правих частинах диференціальних рівнянь моделей, із заданою точністю. Існує багато методів оцінювання цих коефіцієнтів, але найбільш точними є дотичні методи, засновані на вимірюванні параметрів польоту снаряда під час проведення балістичних стрільб. Процес оцінювання на основі МММТ набагато простіший внаслідок меншої кількості коефіцієнтів. Однак існує нагальна проблема, яка полягає в тому, що ММТ визначається додаванням неявного звичайного диференціального рівняння (ЗДР). Неявне ЗДР визначає похідну як неявну функцію, тобто рівняння нерозв'язане відносно похідної [6, 7, 8, 11]. Важливим питанням теоретичного та практичного застосування ММТ є подання системи диференціальних рівнянь моделі у явному вигляді, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів.

Таким чином, **метою статті** є розроблення шляхів перетворення ММТ для отримання явної системи ЗДР, яка розв'язується на основі стандартних чисельних методів.

Виклад основного матеріалу.

1. Модифікована модель матеріальної точки. ММТ – це модель з чотирма ступенями свободи, з яких три визначають координати руху снаряда, а четверта – кутове положення снаряда за кутом нутації.

У загальному вигляді система диференціальних рівнянь ММТ має такий вигляд [3, 4, 5, 9]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}; \\ m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}; \\ I_x \dot{p} = \mathbf{SDM}, \end{cases} \quad (1)$$

де $\mathbf{x}$ – тримірний вектор положення снаряда в просторі;

$\mathbf{u}$ – вектор швидкості польоту снаряда відносно земної системи відліку;

$\mathbf{DF}$ – сила лобового опору (Drag Force);

$\mathbf{LF}$ – піднімальна (нормальна) сила (Lift Force);

$\mathbf{MF}$ – сила Магнуса (Magnus Force);

m – маса снаряда;

$\mathbf{g}$ – прискорення сили тяжіння;

$\mathbf{\Lambda} = 2\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}$ – прискорення від сили Коріоліса, обумовлене обертанням Землі;

$\mathbf{\Omega}$ – кутова швидкість обертання Землі;

$\mathbf{SDM}$ – момент гасіння швидкості обертання снаряда (Spin Damping Moment);

p – кутова швидкість обертання снаряда (швидкість власного обертання);

I_x – полярний момент інерції відносно осі обертання.

Тут і далі у тексті статті складові аеродинамічної сили (моментів) відповідно до STANAG 4355 (Edition 3) [3], а також вектори будемо позначати напівжирними буквами, скаляри – стандартними світлими буквами.

Сила лобового опору, піднімальна сила та сила Магнуса виражаються у векторній формі [3, 4, 5] як

$$\mathbf{DF} = -\frac{1}{2}\rho S_M i C_D \mathbf{v}\,\mathrm{v}; \mathbf{LF} = \frac{1}{2}\rho S_M C_L \mathbf{v}^2 \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}; \mathbf{MF} = \frac{1}{2}\rho S_M d p C_{mag-f}\left(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t} \times \mathbf{v}\right), \quad (2)$$

де ρ – густина повітря;

S_M – площа міделя (поперечного перетину снаряда);

i – коефіцієнт форми (коефіцієнт погодження);

C_D – коефіцієнт лобового опору;

C_L – коефіцієнт піднімальної сили;

d – діаметр (калібр) снаряда;

C_{mag-f} – коефіцієнт сили Магнуса;

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{t}}$ – кут нутації;

$\mathbf{v}$ – вектор швидкості снаряда відносно повітря, що визначається компонентами $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2]$; $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2}$.

Найбільш впливає на динаміку польоту снаряда сила лобового опору, коефіцієнт якого змінюється в квадратичній залежності від кута нутації, що призводить до швидкого збільшення опору зі збільшенням кута нутації. Він варіюється залежно від величини кута нутації снаряда та добре апроксимується виразом $C_D = C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \delta^2$. $C_{D_0}, C_{D_{\alpha^2}}$ – відповідно лінійний та квадратичний коефіцієнти сили лобового опору.

На рисунку 1 схематично показаний напрямок дії на снаряд сили лобового опору, піднімальної сили та сили Магнуса.

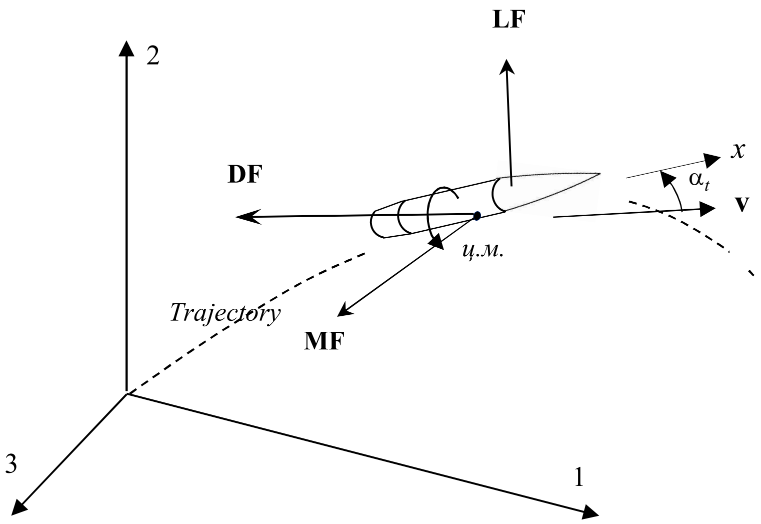

Рисунок 1 – Сила лобового опору, піднімальна сила та сила Магнуса

Момент гасіння швидкості обертання створює від'ємне кутове прискорення обертання снаряда навколо його осі та протидіє обертанню снаряда [3, 4, 5]:

$$\mathbf{SDM} = \frac{1}{2I_X} \rho d^2 S_M C_{spin} \mathbf{v} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}, \tag{3}$$

де C_{spin} – коефіцієнт гасіння швидкості обертання снаряда;

$\mathbf{H}$ – вектор кінетичного моменту снаряда.

На рисунку 2 показано від'ємний напрямок моменту гасіння, який призводить до зменшення величини швидкості обертання снаряда.

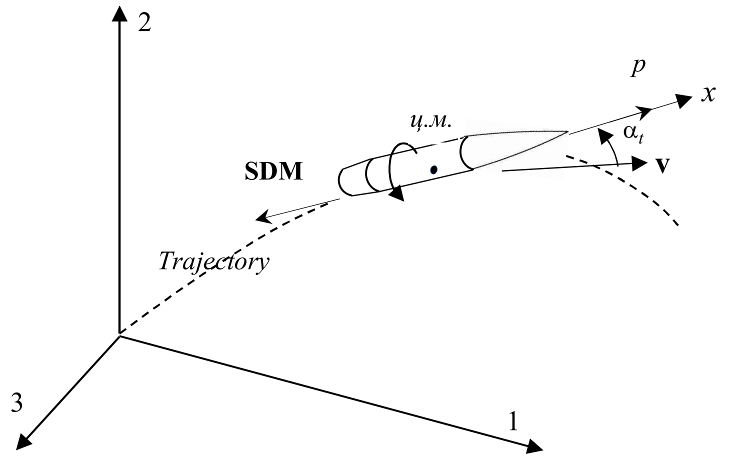

Рисунок 2 – Момент гасіння швидкості обертання снаряда

Кут нутації, що входить до виразів аеродинамічних сил, визначається [3, 4, 5] як

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{t}} = -\frac{8I_x p(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{u}})}{\pi\rho d^3\left(C_{M_{\alpha 0}} + C_{M_{\alpha^2}}\alpha_t^{\,2}\right)\mathbf{v}^4}, \tag{4}$$

де $C_{M_{\alpha 0}}, C_{M_{\alpha^2}}\alpha_t^2$ – відповідно лінійний та квадратичний коефіцієнти перекидального моменту (Overturning Moment), з початковими умовами $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{t_0}} = 0$.

Кутова швидкість обертання та кутове прискорення снаряда визначаються [3, 5] як

$$p = p_0 + \int_0^t \dot{p}dt;\ \dot{p} = \frac{\pi\rho d^4 p\mathbf{v}C_{spin}}{8I_x}. \tag{5}$$

З початковими умовами $p_0 = \dfrac{2\pi u_0}{k_c d}$,

де p_0 – кутова швидкість снаряда на зрізі ствола гармати;

t – час польоту снаряда;

u_0 – початкова швидкість польоту снаряда;

k_c – відносна довжина ходу нарізів ствола гармати.

2. Аналіз проблеми розв'язку ММMT. У наш час існують різноманітні подання ММMT. Загальна проблема полягає в тому, що ММMT визначається додаванням неявного звичайного диференціального рівняння кутів нутації α_t, які залежать від прискорення польоту снаряда $\dot{u}$, що призводить до диференціального рівняння, яке визначається неявною функцією.

Для з'ясування цього питання запишемо систему диференціальних рівнянь ММMT у такому вигляді [9, 10, 12, 13]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}; \\ m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{AF} + \mathbf{EF}; \\ I_x \dot{p} = \mathbf{SDM}, \end{cases} \tag{6}$$

де $\mathbf{AF}$ – аеродинамічні сили $(\mathbf{DF}, \mathbf{LF}, \mathbf{MF})$, які функціонально залежать від кута нутації α_t;

$\mathbf{EF}$ – зовнішні сили $(mg; m\Lambda)$, які не залежать від α_t.

Запишемо рівняння аеродинамічних сил як функціональну залежність від параметрів

$$\mathbf{AF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}) = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF}, \tag{7}$$

а рівняння зовнішніх сил подамо як

$$\mathbf{EF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}) = m\mathbf{g} + m\boldsymbol{\Lambda}. \tag{8}$$

Перепишемо систему диференціальних рівнянь (6) з урахуванням виразів (7) та (8) у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}; \\ m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{AF}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})\right) + \mathbf{EF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}); \\ I_x \dot{p} = \mathbf{SDM}. \end{cases} \tag{9}$$

Кут нутації α_t в системі диференціальних рівнянь (9) залежить від $\dot{u}$, що робить її неявно визначеною (друге рівняння системи (9)). Так, кут нутації α_t залежить від прискорення польоту снаряда $\dot{u}$ та приводить до диференційного рівняння, що визначається неявною функцією. Це робить МММТ такою, що складно розв'язується [6, 7, 8]. Щоб почати чисельне інтегрування диференціальних рівнянь МММТ, необхідно передбачити величину $\dot{u}$, використовуючи α_{t_0}, і потім, використовуючи величину $\dot{u}$, обчислити α_t, використовуючи рівняння (4), і так далі, крок за кроком інтегрування.

Таким чином, для подальшої можливості застосування модифікованої моделі матеріальної точки для відновлення коефіцієнтів аеродинамічних сил (моментів) актуальним напрямом є подання системи диференціальних рівнянь моделі у явному вигляді, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів.

3. Розроблення модифікованої математичної моделі матеріальної точки у явному вигляді. Запишемо векторне диференціальне рівняння модифікованої моделі матеріальної точки

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF} + m\mathbf{g} + m\boldsymbol{\Lambda}, \tag{10}$$

у скалярній формі шляхом проєктування її правої частини на осі земної системи координат $0_0 123$ (рисунок 3) без урахування сили Коріолиса та вважаючи $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, отримаємо:

$$\frac{d}{dt}u_1 = -\frac{1}{2}\frac{\rho S\left(C_{D_0} + C_{D_2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\right)\mathrm{v}\mathrm{v}_1}{m} + \frac{1}{2}\frac{\rho S C_L \mathrm{v}^2 \alpha_1}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho S d p C_{mag-f}\left(\alpha_2 \mathrm{v}_3 - \alpha_3 \mathrm{v}_2\right)}{m};$$

$$\frac{d}{dt}u_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho S\left(C_{D_0} + C_{D_2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\right)\mathrm{v}\mathrm{v}_2}{m} + \frac{1}{2}\frac{\rho S C_L \mathrm{v}^2 \alpha_2}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho S d p C_{mag-f}\left(-\alpha_1 \mathrm{v}_3 - \alpha_3 \mathrm{v}_1\right)}{m} - g;$$

$$\frac{d}{dt}u_3 = -\frac{1}{2}\frac{\rho S\left(C_{D_0} + C_{D_2}\left(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2\right)\right)\mathrm{vv}_3}{m} + \frac{1}{2}\frac{\rho SC_L\,\mathrm{v}^2\,\alpha_3}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho SdpC_{mag-f}\left(\alpha_1\,\mathrm{v}_2 - \alpha_2\,\mathrm{v}_1\right)}{m}. \quad (11)$$

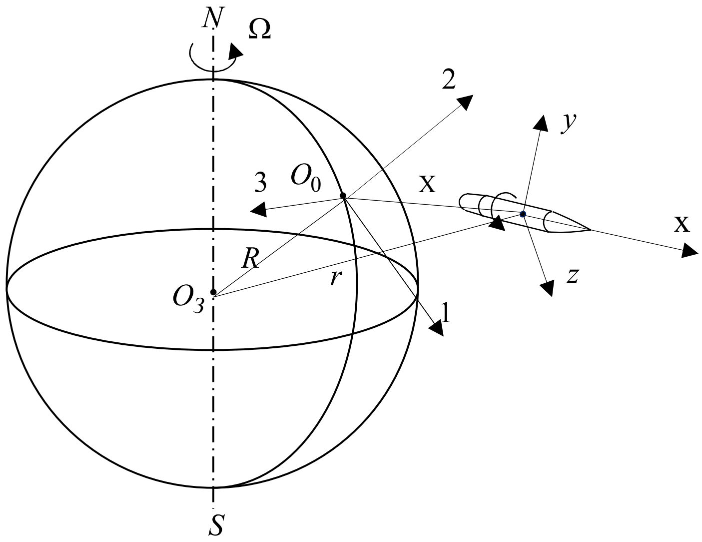

Рисунок 3 – Орієнтація систем координат за стандартом STANAG 4355

Розкладаючи C_M у ряд Тейлора за кутом нутації і утримуючи лише лінійний член розкладу, вважаючи $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$, складові кута нутації (4) у скалярній формі набудуть такого вигляду:

$$\alpha_1 = \frac{2I_x p\left(\mathrm{v}_2\left(\frac{d}{dt}u_3\right) - \mathrm{v}_3\left(\frac{d}{dt}u_2\right)\right)}{\rho S_M dC_{M_{\alpha 0}}\,\mathrm{v}^4}; \alpha_2 = \frac{2I_x p\left(-\mathrm{v}_1\left(\frac{d}{dt}u_3\right) + \mathrm{v}_3\left(\frac{d}{dt}u_1\right)\right)}{\rho S_M dC_{M_{\alpha 0}}\,\mathrm{v}^4}; \alpha_3 = \frac{2I_x p\left(\mathrm{v}_1\left(\frac{d}{dt}u_2\right) - \mathrm{v}_2\left(\frac{d}{dt}u_1\right)\right)}{\rho S_M dC_{M_{\alpha 0}}\,\mathrm{v}^4}. \quad (12)$$

Система диференціальних рівнянь (12) є «заплутаною» відносно похідної $\frac{d}{dt}u$, і завдання постає в розв’язуванні її відносно цих похідних та приведенні до алгебраїчних рівнянь. Для цього введемо такі позначки:

$$\frac{d}{dt}u_1 = Z_1\,; \frac{d}{dt}u_2 = Z_2; \frac{d}{dt}u_3 = Z_3, \quad (13)$$

розв’язуючи отриману алгебраїчну систему відносно *Z*, отримаємо доволі громіздку систему рівнянь, яку можна суттєво спростити, використовуючи заміну змінних.

Введемо три безрозмірних параметри:

$$W = S\left(2m\right)^{-1}; \hat{I}_x = I_x\left(Wmd^2\right)^{-1}; \hat{p} = pdv^{-1}. \quad (14)$$

Параметр $\hat{I}_x$ – число, яке можна подати як коефіцієнт моментів інерції та яке задовольняє умові [9]:

$$\hat{I}_x \le \frac{1}{8}. \quad (15)$$

Нерівність (15) справедлива для однорідного повного циліндра, яким з достатньою точністю є снаряд. Число $\hat{p}$ – динамічний параметр, який можна інтерпретувати як двократне відношення швидкості точки на поверхні снаряда до швидкості повітряного потоку.

Проведемо заміну та покладемо

$$\hat{\alpha}_1=\frac{\alpha_1}{C_M};\hat{\alpha}_2=\frac{\alpha_2}{C_M};\hat{\alpha}_3=\frac{\alpha_3}{C_M};\ \hat{\alpha}^2=\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2}{C_M^2};\hat{C}_{D_2}=\frac{C_{D_2}}{C_M^2};\hat{C}_L=\frac{C_L}{C_M};\hat{C}_{mag-f}=\frac{C_{mag-f}}{C_M},\quad (16)$$

послідовно перетворюємо систему диференціальних рівнянь (12), приводимо подібні члени та спрощуємо їх множники. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
Z_1&=-\rho\Big(-\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\,\alpha_1+\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(\hat{\alpha}_1{}^2+\hat{\alpha}_2{}^2+\hat{\alpha}_3{}^2\right)\Big)\mathrm{v}\mathrm{v}_1-\hat{C}_{mag-f}dp\left(-\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_3+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_2\right)\Big)W;\\
Z_2&=-\rho\Big(-\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\,\alpha_2+\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(\hat{\alpha}_1{}^2+\hat{\alpha}_2{}^2+\hat{\alpha}_3{}^2\right)\Big)\mathrm{v}\mathrm{v}_2+\hat{C}_{mag-f}dp\left(-\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_3+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_1\right)\Big)W-g;\quad (17)\\
Z_3&=\rho\Big(\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\,\alpha_3-\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(\hat{\alpha}_1{}^2+\hat{\alpha}_2{}^2+\hat{\alpha}_3{}^2\right)\Big)\mathrm{v}\mathrm{v}_3+\hat{C}_{mag-f}dp\left(-\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_2+\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_1\right)\Big)W.
\end{aligned}$$

Відповідно до виразів (14) та (16) рівняння, що описують кут нутації в скалярній формі (13), набудуть такого вигляду:

$$\hat{\alpha}_1=\frac{\hat{I}_x\,p\left(\mathrm{v}_3\,Z_2-\mathrm{v}_2\,Z_3\right)}{\rho\,\mathrm{v}^4};\hat{\alpha}_2=\frac{\hat{I}_x\,p\left(\mathrm{v}_3\,Z_1-\mathrm{v}_1\,Z_3\right)}{\rho\,\mathrm{v}^4};\ \hat{\alpha}_3=\frac{\hat{I}_x\,p\left(\mathrm{v}_2\,Z_1-\mathrm{v}_1\,Z_2\right)}{\rho\,\mathrm{v}^4}.\quad (18)$$

Виключаємо з системи рівнянь (17) та (18) похідні $\frac{d}{dt}u_i=Z_i$, отримаємо:

– диференціальне рівняння ММMT

$$\begin{aligned}
Z_1&=-\frac{1}{\mathrm{v}_3\mathrm{v}_2\,p\hat{I}_x}\Big(\rho\Big(\Big(-\hat{C}_{mag-f}dp\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_1+\hat{C}_{mag-f}dp\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_2+\mathrm{v}\Big(-\hat{C}_L\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}+\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(A^2\right)\Big)\mathrm{v}_3\Big)\Big)\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\,p\hat{I}_xW+\\
&+\mathrm{v}^4\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_1+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_3\right)\Big)\Big);\\
Z_2&=-\frac{1}{\mathrm{v}_3\,p\hat{I}_x}\Big(\Big(\Big(\hat{C}_{mag-f}dp\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_2-\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_1\right)p+\mathrm{v}\Big(-\hat{C}_L\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}+\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(A^2\right)\Big)\mathrm{v}_3\Big)\Big)\mathrm{v}_2\,p\hat{I}_xW+\mathrm{v}^4\,\hat{\alpha}_1\Big)\rho\Big);\quad (19)\\
Z_3&=-\Big(-\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\,\hat{\alpha}_3+\Big(C_{D_0}+\hat{C}_{D_2}\left(A^2\right)\Big)\mathrm{v}\mathrm{v}_3+\hat{C}_{mag-f}dp\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_2-\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_1\right)\Big)\rho W;
\end{aligned}$$

– замкнуту систему рівнянь для кута нутації без $\frac{d}{dt}u_i$

$$\begin{aligned}
&-p\Big(\hat{C}_{mag-f}d\Big(-\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_3^2+\mathrm{v}_1\,\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_2\left(-\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_2+\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_1\right)\Big)p+\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\times\left(-\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_3+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_2\right)\rho W+\mathrm{v}_3\,g\Big)\hat{I}_x+\hat{\alpha}_1\rho\mathrm{v}^4=0;\\
&\Big(-\hat{C}_{mag-f}dp\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_1+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_3\right)\mathrm{v}_2+\hat{C}_{mag-f}d\alpha_2\left(\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_3^2\right)p-\hat{C}_L\,\mathrm{v}^2\times\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_3-\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_1\right)\Big)\mathrm{v}_2\,pW\hat{I}_x-\mathrm{v}^4\left(\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_1-\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_3\right)=0;\quad (20)\\
&\hat{\alpha}_1\,\mathrm{v}_1+\hat{\alpha}_2\,\mathrm{v}_2+\hat{\alpha}_3\,\mathrm{v}_3=0.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що рівність нулю останнього рівняння для кута нутації (20) є наслідком того, що одиничний вектор нутаційних коливань нутації перпендикулярний вектору швидкості польоту снаряда відносно повітря.

Розв’язуючи систему рівнянь (20) відносно складових кута нутації $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\alpha}_3$, маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= \frac{p\left(W\,dp^2\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x\,\mathrm{v}_3 - Wp\hat{C}_L\hat{I}_x\,\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}^2\mathrm{v}_3\right)g\hat{I}_x}{\mathrm{v}^2\,\rho\left(W^2d^2p^4\hat{C}^2_{mag-f}\hat{I}^2_x + W^2p^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\right)};\\
\hat{\alpha}_2 &= \frac{Wp^2\hat{C}_L\hat{I}^2_x g\left(\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_3^2\right)}{\mathrm{v}^2\,\rho\left(W^2d^2p^4\hat{C}^2_{mag-f}\hat{I}^2_x + W^2p^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\right)};\\
\hat{\alpha}_3 &= \frac{p\left(W\,dp^2\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x\,\mathrm{v}_1 + Wp\hat{C}_L\hat{I}_x\,\mathrm{v}_2\mathrm{v}_3 + \mathrm{v}^2\mathrm{v}_1\right)g\hat{I}_x}{\mathrm{v}^2\,\rho\left(W^2d^2p^4\hat{C}^2_{mag-f}\hat{I}^2_x + W^2p^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\right)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Підставляючи вирази (21) у систему рівнянь (19) після зворотної заміни матимемо:

$$Z_1 = \frac{d}{dt}u_1;\; Z_2 = \frac{d}{dt}u_2;\; Z_3 = \frac{d}{dt}u_3, \tag{22}$$

після відповідних перетворень та спрощення отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_1 = -W\rho\mathrm{v}C_{D_0}\,\mathrm{v}_1 - \Big(\Big(p^2g\,\mathrm{v}_1\Big(\hat{C}_{D_2}\left(\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_3^2\right)g + W\mathrm{v}\rho\mathrm{v}_2\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \hat{C}^2_L\mathrm{v}^2\right)\Big)\Big)\times\\
&\times\hat{I}^2_x + gp\rho\mathrm{v}^3\left(dp\hat{C}_{mag-f}\,\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}^2\,\hat{C}_L\,\mathrm{v}_3\right)\hat{I}_x\Big)W\Big)/\Big(\mathrm{v}^3\,\rho\Big(W^2p^2\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\right)\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\Big)\Big);\\
&\frac{d}{dt}u_2 = -W\rho\mathrm{v}C_{D_0}\,\mathrm{v}_2 - \Big(p^2g\Big(\hat{C}_{D_2}\left(\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_3^2\right)g + W\mathrm{v}\rho\mathrm{v}_2\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \hat{C}^2_L\mathrm{v}^2\right)\Big)\times W\mathrm{v}^2\,\hat{I}^2_x +\\
&+Wdgp^2\rho\mathrm{v}^3\,\hat{C}_{mag-f}\left(\mathrm{v}_1^2 + 2\mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_3^2\right)\hat{I}_x\Big) + g\rho\mathrm{v}^7\Big)/\Big(\mathrm{v}^3\,\rho\Big(W^2p^2\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\right)\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\Big)\Big);\\
&\frac{d}{dt}u_3 = -W\rho\mathrm{v}C_{D_0}\,\mathrm{v}_3 - \Big(p^2\,\mathrm{v}_3\,g\Big(\hat{C}_{D_2}\left(\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_3^2\right)g + W\mathrm{v}\rho\mathrm{v}_2\times\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \hat{C}^2_L\mathrm{v}^2\right)\Big)\hat{I}^2_x +\\
&+gp\rho\mathrm{v}^3\left(dp\hat{C}_{mag-f}\,\mathrm{v}_2\mathrm{v}_3 + \mathrm{v}^2\,\hat{C}_L\,\mathrm{v}_1\right)\hat{I}_x\Big)W\Big)/\Big(\mathrm{v}^3\,\rho\Big(W^2p^2\left(\hat{C}^2_{mag-f}d^2p^2 + \mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\right)\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{23}$$

Варто зазначити, що рівняння для швидкості обертання снаряда залишається незмінним [3, 5]:

$$\frac{d}{dt}p = \frac{1}{2I_x}S\rho d^2p\mathbf{v}C_{spin}.$$

Відповідно значення складових кута нутації (21) після перетворення та зворотної заміни матимуть такий вигляд:

$$\frac{\alpha_1}{C_M} = \hat{\alpha}_1;\; \frac{\alpha_2}{C_M} = \hat{\alpha}_2;\; \frac{\alpha_3}{C_M} = \hat{\alpha}_3,$$

або у більш зручному рекурентному вигляді:

$$\alpha_1 = \frac{p\left(pW\left(dp\hat{C}_{mag-f}\,\mathrm{v}_3 - \hat{C}_L\,\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\right)\hat{I}_x + \mathrm{v}^2\mathrm{v}_3\right)g\hat{I}_x}{\mathrm{v}^2\,\rho\left(W^2\,p^2\left(d^2p^2\hat{C}^2_{mag-f} + \mathrm{v}^2\,\hat{C}^2_L\right)\hat{I}^2_x + 2Wdp^2\,\mathrm{v}^2\,\hat{C}_{mag-f}\hat{I}_x + \mathrm{v}^4\right)};$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 Wp\hat{C}_L\hat{I}_x\left(\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_3^2\right)}{\rho W\left(d\,p\hat{C}_{mag-f}\,\mathrm{v}_3 - \hat{C}_L\,\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\right)\hat{I}_x + \mathrm{v}^2\mathrm{v}_3}; \tag{24}$$

$$\alpha_3 = \frac{-\alpha_1\,\mathrm{v}_1 - \alpha_2\,\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_3}.$$

Отримана система рівнянь (24) є невід'ємною частиною форми ММMT. Саме вона дозволяє розрахувати $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ після розрахунку відносно $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$, перетворених до явної форми рівнянь (23).

Висновки

Важливою теоретичною і прикладною задачею підвищення ефективності застосування артилерії є розроблення математичних моделей польоту снаряда, за якими балістичні обчислювачі розраховують установки для стрільби артилерійських систем. Конкретний вигляд опису процесу руху снаряда залежить від припущень, закладених в основу складання математичної моделі, вибраної системи координат і системи діючих сил (моментів). У статті наведений підхід до побудови математичної моделі польоту снарядів як ММMT з гіроскопічною стабілізацією, в основу якої покладені диференціальні рівняння в скалярній формі: диференціальне рівняння руху центра мас та диференціальне рівняння нутаційних коливань снаряда. Як складові головного вектора діючих сил ураховано складові повної аеродинамічної сили: силу лобового опору, підіймальну силу та силу Магнуса. Кутове положення снаряда характеризується врахуванням кута нутації, а кінетична енергія обертального руху враховується через кутову швидкість снаряда навколо його осі симетрії.

Визначена загальна проблема ММMT, обумовлена наявністю неявного звичайного диференціального рівняння – вектора кута нутації α_t, який залежить від прискорення польоту снаряда $\dot{u}$, що призводить до диференціального рівняння, яке визначається неявною функцією.

Розкриті процедури перетворення системи диференціальних рівнянь ММMT до явного вигляду, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів. Отримана явна система рівнянь, еквівалентна ММMT.

Таким чином, отримана явна система рівнянь дозволяє реалізувати її в балістичних інтегрувальних алгоритмах сучасних систем управління вогнем артилерії, що потребує застосування точних і водночас швидких математичних моделей розрахунку польоту снарядів.

Подальшим напрямом досліджень буде отримання методів перетворення моделі 6DoF до модифікованої моделі матеріальної точки у явному вигляді з урахуванням максимальної кількості нелінійних членів аеродинамічних коефіцієнтів.

Перелік джерел посилання

1. Дмитриєвський А. А., Лисенко Л. Н. Зовнішня балістика URL: http://surl.li/odnge (дата звернення 30.09.2023).
2. Балістика : підручник / С В. Беневольський та ін. URL: http://surl.li/odnjc (дата звернення 30.09.2023).
3. STANAG 4355 (Edition 3), The modified point mass and five degrees of freedom trajectory models: NSAl0454(2009)-JAIS/4355, dated 17 April 2009. 95 p. (NATO Standardization Agency).
4. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics, theory and design of guns and ammunition : book. London, New York : Taylor & Francis Group, 2007. 514 p.
5. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics. Atglen, PA. : Schiffer Military History, 2012. 328 p.
6. Калиткін М. М. Чисельні методи. М. : Наука, 1978. 512 с.
7. Kincaid D. Numerical analysis. Brooks : Cole Publishing Company. 1991. 690 p.

8. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Чисельні методи вирішення обернених задач математичної фізики. URL: http://surl.li/odqto (дата звернення 30.09.2023).
9. Explicit «ballistic M-model»: a refinement of the implicit «modified point mass trajectory model» / Baranowski L., Gadomski B., Majewski P. and Szymonik J. *Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences*. 2016. Vol. 64, No. 1, pp. 81 – 89. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0010.
10. Baranowski L. Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters. *Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences*. 2013. Vol. 61, No. 2, pp. 475–484. DOI: 10.2478/bpasts-2013-0047.
11. Bradley J. An alternative form of the modified point– mass equation of motion. Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Memorandum report № BRL–MR–3875. 1990. 10 p.
12. Lieske R., Reiter M. Equations of motion for a modified point mass trajectory. Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Memorandum report № BRL–MR–1314. 1966. 24 p.
13. Lieske R., Danberg E. Modified point mass trajectory simulation for base-burn projectiles. Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Technical report № BRL–TR–3321. 1992. 51 p.

Стаття надійшла до редакції 12.10.2023 р.

UDC 623.546

R. Bubenshchykov, S. Bondarenko

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE PROJECTILE FLIGHT AS A MODIFIED MODEL OF THE MATERIAL POINT IN EXPRESS FORM

A promising direction for improving the accuracy and operational efficiency of firing artillery systems is the development of ballistic computers that implement procedures for determining settings using the solution of a system of differential equations (mathematical model) that describe the movement of a projectile in the air. The main problem in the development of mathematical models is the possibility of determining with a given accuracy the coefficients of aerodynamic forces (moments) that are in the right-hand sides of differential equations. An urgent issue in this direction is the study of the possibility of restoring the coefficients of aerodynamic forces (moments) by solving the inverse problem of external ballistics using mathematical models of projectile flight. The movement of projectiles is usually described using one of three mathematical models, which differ from each other in the main level of complexity and, accordingly, the level of adequacy to the real process of projectile movement in the air. Therefore, the complexity of recovery procedures is determined by the number of coefficients of aerodynamic forces (moments) and differential equations included in mathematical models. A modified model of a material point is presented as a mathematical model of projectile flight in which all aerodynamic forces are taken into account, the orientation of the projectile is characterized by taking into account the nutation angle, and the kinetic energy of the rotational movement is taken into account through the angular velocity of the projectile around its axis of symmetry. It is shown that the modified material point model is determined by adding an implicit ordinary differential equation - an equation that describes the nutational oscillations of the projectile, which depend on the acceleration of its flight. Procedures for converting the system of differential equations of the modified material point model to an explicit form are disclosed, which allows them to be solved on the basis of standard numerical methods.

K e y w o r d s : projectile, ballistics, artillery units, mathematical model, modified model, aerodynamic forces (moments), projectile motion, nutation, differential equations.

Бубенщиков Роман Володимирович – ад’юнкт Національної академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.
http://orcid.org/0000-0001-6610-0360

Бондаренко Семен Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, докторант Національної академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.
http://orcid.org/0000-0002-9084-6362